



Applications des Mathématiques

Livre de l'élève

Deuxième secondaire

Auteurs

M. Kamal Younis Kabsha

Prof.Dr. Nabil Tawfik Eldabe   M. Cerafiem Elias Skander

révisée par

M . Hussein Mahmoud Hussein

conseiller pour les mathématiques

La.Tradiction révisée par

M . Fathe Ahmed Chehata   M . Adel Mohamed Hamza

M . Nasser Saad Zaghloul

2019 - 2020

غير مصرح بتداول هذا الكتاب خارج وزارة التربية والتعليم والتعليم الفنى

Première édition 2015/2016
Numéro de Dépôt 10559 / 2015
Numéro de Dépôt International 978 - 977 - 706 - 016 - 5



Avant-propos

بسم الله الرحمن الرحيم

Nous avons le plaisir de vous présenter ce manuel et la philosophie sur laquelle le contenue de ce livre a été fonder et que nous allons résumer dans ce qui suit :

1 Développé de l'unité de la connaissance et son intégration dans les mathématiques ainsi que l'intégration des notions et la liaison entre tous les différents domaines des mathématiques scolaires.

2 Donné à l'apprenant tout ce qui est opératoire des informations, des notions et des stratégies de résolution des problèmes.

3 Adopté l'accès des normes nationaux et les niveaux éducatifs de l'enseignement en Egypte à partir :

a) L'identification de ce qui est indispensable pour l'apprentissage des élèves et les motifs d'apprentissage.

b) La détermination précise des compétences attendues de l'élève.

Pour cela, on a axé sur les points suivants :

- l'apprentissage des mathématiques soit un but à atteindre continuellement par l'élève dans sa vie.
- la motivation de l'apprenant vers les mathématiques.
- la capacité du travail individuel et le travail en groupe.
- l'activité, l'assiduité et la créativité de l'apprenant.
- l'aptitude de l'apprenant à communiquer en langage mathématiques.

4 Suggéré des méthodes et des stratégies d'enseignement dans le livre du maitre.

5 Suggéré des activités variées convenables au contenue pour que l'apprenant choisisse l'activité qui lui convient.

6 Estimé les mathématiques et les apports des savants musulmans, arabes et étrangers pour le développement des mathématiques.

Ce manuel comporte trois domaines :

- L'algèbre, les relations et les fonctions. - Le calcul différentiel et intégral. - La trigonométrie.

★ On a répartis le manuel en des unités intégrés et interconnectés. Pour chacune de ces unités, il y a une introduction qui indique les compétences attendues de l'élève, un organigramme et les vocabulaires. Chaque unité comprend des leçons dont l'objectif est titré A apprendre et chacune des leçons commence par une idée principale qui est l'axe de l'apprentissage.

Le contenue scientifique est hiérarchisé de plus simple au plus compliqué et comporte des activités, adaptés au niveau de compétence des élèves et à leurs différences individuelles, ces activité visent à relier les mathématiques par les autres disciplines aussi bien que chercher des liaisons et des applications de la vie courante. La rubrique Décelez l'erreur vise à remédier les erreurs communes des élèves. Le manuel actuel contient également des questions liées à l'environnement et son traitement.

★ Chaque leçon, contient des exemples variés, suivant les niveaux taxonomique et qui vont de plus facile au plus difficile, suivis par des exercices titrés Essayez de résoudre et enfin de la leçon des Exercices qui propose des problèmes variés abordent les notions et les compétences envisagées au cours de la leçon.

★ La parti illustrative de l'unité se termine par un Résumé comporte ce qu'il faut retenir de l'unité ensuit Exercices généraux sur les notions et les capacités acquises au cours de l'unité.

★ L'unité se termine par un Epreuve cumulative pour mesurer le niveau des compétences attendues acquises à la fin de l'unité.

★ La clôture du livre est par des Epreuves générales pour évaluer le niveau des compétences attendues acquises à la fin du semestre.

Enfin nous espérons que ce travail sera bénéfique pour vous et pour notre chère Egypte.

Et que Dieu soit derrière de l'intention, guide vers le droit chemin.

SOMMAIRE

I: Mécanique

Introduction sur l'évolution de la mécanique. 2

Unité 1

Statics

1 - 1 Forces. 12
1 - 2 Décomposition des force. 20
1 - 3 Résultantes de plusieurs forces coplanaires, concourantes. 25
1 - 4 Equilibre d'une particule sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes. 31
43
45
47

Unité 2

Dynamique

2 - 1 Mouvement rectiligne. 52
2 - 2 Mouvement rectiligne à accélération uniforme. 64
2 - 3 Chute libre 73
2 - 4 Loi de l'attraction universelle. 78
Résumé de l'unité. 83
Exercices généraux . 86
Èpreuve cumulative. 88

SOMMAIRE

II: Géométrie et mesure

Géométrie et mesure

Unité 3

3 - 1 droite et plan dans l'espace. 92

3 - 2 Pyramide et cône. 98

3 - 3 Aire latérale et aire totale d'une pyramide et d'un cône. 103

3 - 4 Volume d'une pyramide et d'un cône droit. 107

3 - 5 Equation du cercle 112

Résumé de l'unité. 123

Exercices généraux. 124

Èpreuve cumulative. 126

III: Probabilité

Probabilité

Unité 4

4 - 1 Calcul de probabilité. 130

Résumé de l'unité. 147

Exercices généraux . 149

Èpreuve cumulative. 152

Épreuves générales. 155

Réponses de quelques exercices 166

Mécanique

Introduction sur l'évolution de la mécanique

De manière générale, la mécanique est la science qui étudie le mouvement et l'équilibre d'un corps matériel en utilisant des lois spécifiques. Par exemple, il y a des lois concernant la révolution de la Terre autour du Soleil, le lancement de missiles, de roquettes ou d'un obus d'un canon. La mécanique nous permet l'étude du changement de la position d'un corps matériel dans l'espace au cours du temps. L'influence mécanique entre les corps est l'effet qui change le mouvement de ces corps suivant les différentes forces agissant sur ces corps. Donc, l'objet principal de la mécanique est l'étude des lois du mouvement et de l'équilibre des corps sous l'effet des forces. Cette science peut être divisée en deux domaines:

La statique[1]

(**C'est la science de l'équilibre des corps**) Elle étudie l'équilibre des corps sous l'influence de forces. On dit que les forces qui ne changent pas l'état du corps, sont en équilibre et que le corps est en équilibre sous l'effet de ces forces. L'étude de l'équilibre des corps (**La statique**) a commencé aux anciennes époques comme une nécessité de production des outils simples (comme les leviers, les portails, le plan incliné et autres). Les œuvres d'Archimède étaient un apport important pour fonder la science de la statique à cette époque.

La dynamique[2]

(**C'est la science du mouvement des corps**) Elle étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces. Elle se divise en **cinématique** qui étudie les propriétés du mouvement du point de vue géométrique (description du mouvement sans se soucier des forces qui le provoquent) et la **cinétique** qui étudie l'effet des forces qui provoquent ou qui changent le mouvement. L'étude de la science de dynamique est venue trop tard après l'étude de la statique.

Il y a aussi:

La mécanique du point matériel (un corps dont on peut étudier le mouvement et l'équilibre en négligeant ses dimensions.)

La mécanique du solide (un corps formé d'un ensemble de points tels que pris deux à deux, leur distance est stable et ne varie sous aucune influence extérieure.).

La mécanique des corps à masse variable (certains systèmes ou corps subissent des changements de masse en fonction du temps, ajout ou séparation de corpuscules qui peuvent diminuer ou augmenter sa masse durant le mouvement. Parmi ces corps, on peut citer : les missiles, les

---

1 On va étudier dans cette unité la notion de force, ses propriétés, ses unités de mesure, la décomposition d'une force en deux composantes. On va calculer la résultante de plusieurs forces concourantes puis étudier l'équilibre d'un point matériel sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes.

2 Dans cette unité (la cinématique) qui décrit le mouvement des corps sans étudier les forces qui le provoquent. Nous allons étudier le mouvement des corps et les phénomènes qui l'accompagnent, leurs causes, leurs lois et leur application sur le mouvement horizontal et vertical munis d'une accélération uniforme et la loi d'attraction universelle de Newton

véhicules miniers dont la masse changent avec la consommation de carburant).

La mécanique des corps qui subissent une déformation réversible (**déformation élastique**) étudie les corps capables de reprendre leurs formes et dimensions initiales lorsque l'influent extérieur s'annule, et ceux qui subissent une déformation irréversible (déformation plastique), lorsque le corps soumis à des influents, il ne reprend plus sa forme initiale après que ces influents s'annulent.

L'évolution de la mécanique

Mécanique classique

L'une de plus ancienne des branches de la Mécanique, elle s'intéresse à l'étude des forces agissant aux corps et l'interprétation du mouvement des planètes et qui aide également aux multiples des techniques modernes (génie civil, génie de l'Architecture, l'observation spatiale, ……)

Mécanique quantique

C'est l'ensemble des théories physiques qui ont apparues au XXème siècle, pour expliquer les phénomènes au niveau de l'atome et des particules. La mécanique quantique a fusionné les propriétés de la particule et de l'onde pour donner le terme de dualité (onde corpuscule). De cette façon la mécanique quantique se charge de l'explication physique au niveau atomique. Elle s'applique aussi à la mécanique classique sans montrer son influence à ce niveau. La mécanique quantique est la généralisation de la physique classique en raison de la possibilité de son application aux niveaux atomiques et général.

La mécanique quantique tire son nom de l'existence de quantas (grandeurs physiques ne pouvant se manifester que par multiples de quantités fixes, ces grandeurs sont par exemple l'énergie ou le moment cinétique des particules.).

Mécanique des fluides:

Cette branche de la mécanique quantique propose d'étudier les fluides (liquides et gaz...) et les forces qui y sont appliquées. Elle se divise en deux parties : la statique des fluides qui est l'étude des fluides au repos et la dynamique des fluides qui étudie des fluides en mouvement.

La mécanique biologique :

La mécanique biologique (biomécanique) : c'est la science de l'étude et l'analyse du mouvement des êtres vivants dans tous les égards (Anatomique, physiologique, corporelle et autres….), cette science traite les forces appliquées sur les corps vivants soit dans le cas de repos ou bien dans le cas du mouvement. Comme des exemples le mouvement des intestins, le débit sanguin dans les artères, transmission des ovules dans la trompe de Fallope, transmission des liquides dans l'uretère du rognon à la vessie, la digestion où à partir d'une analyse mécanique on peut améliorer les performances des organes

La théorie générale de la relativité

La théorie de la relativité d'Einstein a changé beaucoup de notions concernant les principales expressions de base en physique : le lieu, le temps, la masse et l'énergie. Elle a causé un saut en physique théorique et en physique de l'espace au XXème siècle, au moment de sa publication, et a rectifié la théorie de la mécanique newtonienne qu'on employait depuis 200 ans. La théorie de la relativité a changé la notion de mouvement de Newton en montrant que tout mouvement est relatif. La notion du temps a changé, il n'est plus fixe et limité. L'espace et le temps doivent être perçus comme formant une seule entité alors qu'ils étaient traités en tant que deux éléments différents. La notion du temps dépend de la vitesse des corps et la dilatation et la contraction du temps sont une notion fondamentale pour la compréhension de l'univers. Avec cela, toute la physique classique newtonienne a changé.



Activité

1 - Utilisez le WEB pour chercher les apports des mathématiciens pour l'évolution de la Mécanique. Quelques résultats de la recherche.

Le savant anglais **Isaak Newton** a eu un grand apport pour avoir fondé la mécanique classique, il a établi les lois du mouvement qui constituent en fait des principes à la base de la grande théorie de concernant le mouvement des corps, et les phénomènes astronomiques:

Le savant allemand **Johannes Kepler** et l'italien **Galileo Galilée** avaient un rôle immense à fonder des lois sur le mouvement des planètes. Les lois de Kepler montrent l'existence des force de 1905 à 1916 et la mécanique quantique développée par Max Planck, Heisenberg, Schrödinger gravitation entre les planètes ainsi que le mouvement des planètes autour du soleil comme un centre du mouvement ces restaient dominante jusqu'à la découverte de la théorie de relativité d'**Einstein** et Dirac au début de vingtième siècle.

Ahmed Zewail est le premier à avoir montré comment l'étude des réactions chimiques pouvait être réalisée grâce à des flashs lasers extrêmement brefs (picosecondes puis femto secondes), à l'aide d'un laser décrit comme « l'appareil photo le plus rapide du monde ». L'appareil mis au point permet de voir les mouvements des atomes, ce qui ouvre la possibilité de comprendre leur comportement et de probablement contrôler le résultat de leurs réactions. Le principe qu'il a développé consiste à soumettre un milieu chimique à deux flashs successifs : le premier génère la réaction, le second permet d'analyser par spectroscopie les composés chimiques

Le nom de **Zewail** a été marqué à la liste d'honneur avec **Albert Einstein** et **Graham Bell**.

Pour des informations supplémentaires cherchez dans l'Encyclopédie Wikipedia sur la site internet : http: //ar.wikipedia.org

Unité des mesures

Lorsque un étudiant se présente aux facultés militaires, il soumet à des examens médicaux concernant la taille, le poids, la tension, la fréquence cardiaque,............L'opération de la mesure est une comparaison entre deux quantités de même genre pour savoir le rapport entre leurs grandeurs. Le système utilisé dans la plus part de pays du monde es le système international unifié des mesures (S.I). Ce système se compose des unités de sept unités de bases qui sont standardisées par la mesure directe à l'aide des unités normatives pour la longueur, le temps et

la masse et qui sont gardées au centre des mesures à sèvres en France. Les autres unités sont dérivées des unités de base.

I Unité du système de mesure métrique :

Le tableau suivant montre les unités de base du système métrique et quelques transformations concernant ce système

Grandeur de base	Nom de l'unité	Symbole
Longueur	Mètre	(m)
Masse	Kilogramme	(kg)
Temps	Seconde	(s)

La caractéristique de ce système est la facilité de conversion d'une unité à une autre.



Le femto-seconde : est une partie d'un million de milliard de seconde, c'est-à-dire, un femto seconde vaut 10^{-15} secondes. Le rapport entre la seconde et le femto seconde est la même que celui entre la seconde et 32 millions années.

En 1990, le savant égyptien Ahmed Zewail a confirmé sa découverte connue sous le nom la chimie de femto, après un épuisant effort de son équipe de chercheurs à l'institut technologique de Californie depuis 1979. Sa découverte a montré comment se faisaient les liaisons chimiques à l'échelle de quelques femto secondes, soit un millionième de milliardième de seconde à l'aide des flashs lasers extrêmement brefs décrit comme « l'appareil photo le plus rapide du monde ». L'appareil mis au point permet de voir les mouvements des atomes, ce qui ouvre la possibilité de comprendre leur comportement et de probablement contrôler le résultat de leurs réactions. Cela a permis l'intervention rapide au moment des réactions chimiques à l'aide du laser comme télescope pour voir et suivre les opérations de destruction et de développement dans la cellule. Ce grand savant arabe a mis sa découverte au service de la médecine, la physique, la cosmologie et beaucoup d'autres. Il a donné son nom à une école scientifique au nom du femto chimie..

2- Multiples des unités:

Unité	symbole	mesure
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	K	10^{3}

Sous-unités:

Unité	symbole	mesure
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	u	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

A partir de cela, on peut convertir chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes :

1. 2.75 Km en m.
2. 635 mm. en dm
3. 750 k.Hertz en M.Hertz.
4. 1970 gm en kg.



Rappel

km = 1000m

m = 10 dm

dm = 10 cm

cm = 10 mm

Comme suivant :

1. 2.75 Km =2,75 × 1000 = 2750 m
2. 635 mm = 635 × 10^{-2} = 6,35 dm.
3. 750 kilohertz = 750 × 10^{-3} = 0,75 mégahertz
4. 1970 gm = 1970 × 10^{-3} =1,97 kilogramme

II Grandeurs dérivées :

1 La vitesse



Savez-vous

La seconde normative est le temps découlé par l'atome de césium pour osciller d'une tour complète.

La vitesse est le taux de variation de la distance par rapport au temps. L'unité de mesure de la vitesse = L'unité de mesure de la distance: L'unité de mesure du temps. Alors l'unité de mesure de la vitesse est: mètre/seconde (m/s).

2 L'accélération

L'accélération est le taux de variation de la vitesse par rapport au temps. L'unité de mesure de l'accélération: mètre/seconde au carré (m/s^2). A partir de cela, on peut convertir chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes :



Rappel

Les unités de mesure des quantités vectorielles (la vitesse, l'accélération, la force) décrivent seulement les intensités sans prendre la direction en compte

1. 1 km/h en m/s.
2. 1km/h en cm/s.
3. 1 km\h\s en m/s^2
4. 1km/h/s en cm/s^2

Comme suivant :

1. 1km/h $= \frac{1 \times 1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{5}{18}$ m/s



Rappel

Un jour = 24 heures
Un heure = 60 min.
Minute. = 60 p.

2 1 km/h $= \frac{1 \times 1000 \times 100\text{cm}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{250}{9}$ cm/s

3 km/h/s $= \frac{1000 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s} \times \text{s}} = \frac{5}{18}$ m/s²

4 km/h/s $= \frac{1000 \times 100\text{cm}}{60 \times 60 \text{ s} \times \text{s}} = \frac{250}{9}$ cm/s²



Exercice

1 Convertissez chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes:

a 72 km/h en m/s   b 1000 cm/s en km/h   c 36 km/h/s en cm/s²

3 La force

La force est le produit de la masse (m) par l'accélération (a).

Si le symbole de la force est (F) alors $F = m \times a$.

Unités de mesure de l'intensité de force

Les unités absolues:

Comme Dyne et Newton où 1 Newton = 10^5 Dyne, Le Newton et Le Dyne sont définies comme le suivant:

L e Newton : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 kilogramme lui imprime une accélération d'intensité 1 m /s²

Le Dyne : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 gramme lui imprime une accélération d'intensité 1 cm /s²



Tous les corps (en négligeant sa masse) tompent sur le sol avec une accélération uniform entre 9,78 et 9,82 m/s² selon de latitudes pour faciliter on va la consedérer 9,8 m/s² .

Les unités gravitationnelles:

Comme le gramme poids (g.p) et le kilogramme poids (kg.p.) où 1 kg.p. = 10^3 g.p.

Le kilogramme poids et le gramme poids sont définies ci- dessous:

L e kilogramme poids **:** c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 kilogramme lui imprime une accélération d'intensité 9,8 m /s²

Le gramme poids : c'est l'intensité de la force appliquée à une masse de 1 gramme lui imprime une accélération d'intensité 980 cm /s²

Les unités gravitationnelles et les unités absolues sont liées par la relation: 1 kg.p. = 9,8 Newton et 1 g.p. = 980 dyne.

A partir de cela, on peut convertir chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes :

1. 3,14 Newton en dyne
2. $6,75 \times 10^7$ Dyne en Newton

Comme suivant :

1. 3,14 Newton $= 3,14 \times 10^5 = 314000$ Dyne
2. $6,75 \times 10^7$ Dyne $= 6,75 \times 10^7 : 10^5 = 675$ Newton



Exercice

2. Convertissez chacune des unités suivantes aux autres unités correspondantes:

   a. $\frac{1}{7}$ g.p. en dyne

   b. $5,36 \times 1250$ dyne en Newton

   c. 2,50 Newton en dyne

On peut mettre les grandeurs dérivées dans le tableau suivant:

Grandeur dérivée	Relation avec d'autres grandeurs	Unités de mesures
La vitesse (v)	La distance : Le temps	m/s
L'accélération (a)	La vitesse : Le temps	m/s^2
Force (F)	La masse × L'accélération	N

Vérifiez votre compréhension

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. L'unité de mesure de la masse est:

   a. Le Dyne b. Le Newton
   c. Le kilogramme d. Le kilogramme poids

2. Des grandeurs de base dans le système international est:

   a. La masse b. La vitesse c. l'accélération d. La force

3. Le millilitre est une unité équivalente à:

   a. 10^{3} mètres b. 10^{3} mètres cubes c. 10^{2} centimètres d. 10^{4} décimètres

Répondez aux questions suivantes :

4. Que peut-on dire des quantités suivantes?

   a. 10^{-2} mètres b. 10^{-3} mètres c. 1000 mètres

5. Convertissez chacun de ce qui suit en mètres:

   a. 63,4 centimètres b. 512,6 millimètres c. 0,534 décimètres

6. **Pensé critique :** Calculez en kilogrammes la masse de l'eau nécessaire pour remplir un récipient dont la forme d'un parallélépipède rectangle dont la longueur 1,6 mètres, la largeur 0,650 mètres et la hauteur 36 centimètres sachant que la masse volumique de l'eau est égale à 1 g/cm³ en approchant le résultat à un entier près.

   [Conseil : La masse = volume × masse volumique]



Introduction de l'unité

La science de statique s'intéresse à la solution de tous les problèmes de nature géométriques qui concernent l'étude de l'équilibre des corps matériaux ainsi que la composition et la décomposition des forces qui leur sont appliquées et l'influence mutuelle entre ces corps. Les applications différentes de la statique sont multiples comme la construction des immeubles, des bâtiments et les ponts également la conception des outils et des machines. Newton avait œuvres et des recherches dans ce domaine parmi lesquels Principes mathématiques de la philosophie naturelle qui comporte trois parties qui sont la base de la science de Mécanique classique. L'une des citations célèbre de Newton « Je ne sais pas comment je m'apparais pour le monde mais je m'apparais pour moi-même comme si j'étais un petit enfant qui joue de temps en temps au bord de la mer pour Trouvez un petit caillot lisse ou un merveilleux coquillage tandis que l'océan de la vérité est étendue vague et remplir des secrets devant moi ".

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de:

- Reconnaître la notion de force, la force comme vecteur et les unités de mesure de la force selon les unités de mesure précédentes.
- Trouvez la résultante de deux forces son intensité et sa direction (les deux forces agissant dans un même point).
- Décomposer une force donnée en deux composantes.
- Décomposer une force donnée en deux composantes orthogonales.
- Trouvez la résultante de plusieurs forces coplanaires concourantes.
- Étudier l'équilibre d'un point matériel sous l'effet de plusieurs forces coplanaires, concourantes dans les cas suivants : si deux forces coplanaires, concourantes sont en équilibre:-
  - si trois forces coplanaires, concourantes sont en équilibre.
  - si plusieurs forces coplanaires, concourantes sont en équilibre.
- Calculer la résultante de deux forces géométriquement et algébriquement en utilisant la technologie d'information à travers des activités.
- Appliquer les connaissances étudiées en statique dans des situations physiques et de la vie quotidienne.

 Vocabulaires de base

- Statique
- Force
- Corps rigide
- Force de gravitation
- Accélération d'une chute libre
- Newton
- Dyne
- Kilogramme. poids
- Gramme.poids
- Droite d'action d'une force
- Décomposition d'une force
- Composante d'une force
- Equilibre d'un corps
- Principe du triangle de forces
- Principe de Lamé
- Equilibre d'un corps rigide
- Plan lisse
- Plan lisse incliné
- Centre d'inertie

 Leçons de l'unité

Leçon (1 - 1): Forces.
Leçon (1 - 2): Décomposition d'une force en deux composantes.
Leçon (1 - 3): Résultantes de plusieurs forces coplanaires, concourantes.
Leçon (1 - 4): Equilibre d'une particule sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes.

 Matériel utilisé

- Calculatrice scientfique
- Logiciel graphisme

 Organigramme de l'unité

Statique

- **Forces**
  - Notions
  - Propriétés
- **Equilibre d'une particule sous l'effet de**
  - deux forces
  - trois forces
  - plusieurs forces
  - Principe de triangle de forces
  - Principe de Lamé
  - Décomposition des forces en deux composantes orthogonales puis on mn et x = 0 et y = 0

Trouvez la résultante de forces

- **Géométriquement**
  - Polygone de forces
- **Analytiquement**
  - Décomposition dans deux directions déterminées
    - Deux forces
    - Trois forces
    - Plusieurs forces
  - Décomposition dans deux directions orthogonales
    - Applications physiques et de la vie quotidienne
    - Utilisation de la technologie



Forces

Allez apprendre

- Quelques notions de base de la statique.
- Propriétés des forces.
- Résultante de deux forces concourantes.
- Trouvez la résultante de deux forces concourantes analytiquement.

Vocabulaires de base

- Force
- Résultante
- Corps rigide
- Force de gravitation
- Accélération de la chute libre
- Newton
- Dyne
- Kilogramme.pods
- Gramme.pods

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logical graphisme

Préface:

Vous savez que la statique est une branche des mathématiques qui propose d'étudier les forces et les conditions d'équilibre des corps matériels sous l'effet de ces forces. Dans cette unité, nous allons étudier l'équilibre des corps rigides (1) uniquement. Vous avez déjà étudié la différence entre les quantités scalaires et les quantités vectorielles[1].



Rappel

La quantités scalaire est déterminée par un nombre réel (intensité) comme : distance, temp, masse, aire.
La quantités vectorielle est déterminée par sa valeure et sa direction, comme : vitesse, force, déplacement

Force

L'état d'équilibre d'un corps dépend de la nature de l'influence mécanique entre ce corps et les autres corps c'est-à-dire il dépend de l'état de la pression ou l'attraction ou de la répulsion effectuées sur le corps et dues à cette influence.



Définition 1

➢ Une force est définie par l'effet que produit un corps sur un autre

Propriétés d'une force:

L'effet produit par une force dépend de trois facteurs qui sont:

(i) L'intensité de la force (Sa valeur numérique).

L'intensité d'une force est déterminée en la comparant à l'unité de force de base et l'unité de force de base en mécanique est le Newton (N) le kilogramme. poids (kg.p) **où:**

➢ 1 kgp = 1000 gp et 1 Newton = 10^5 dyne

➢ 1 kgp = 9,8 Newton et 1 gp = 980 dyne

(Sauf indication contraire) [2]



Enrichissez vos connaissances

Les corps physique se divisent à :

- **des corps rigides qui conservent sa forme quelque soit l'intensité de la force agissante sur eux.**
- **Des corps déformables, changeant leurs formes dés une force leur a appliqués comme :**

Liquide, gaz , caoutchouc, patte à modeler, ...

1- **Un corps rigide est un corps qui conserve sa forme sans déformation s'il est soumis à l'influence de facteurs extérieurs.**

2- **La force de gravitation (le poids) est la force de l'attraction terrestre agissant sur le corps. La Terre attire les corps en chute se dirigeant vers elle. L'intensité de l'accélération agissant sur un corps en chute libre diffère d'un lieu sur la Terre à un autre. Une valeur approchée de l'accélération terrestre est 9,8 m/s² sauf indication contraire. Nous allons exposer ce thème en détailles dans d'autres parties de la mécanique.**

(ii) La direction de la force

La figure (1) ci-contre, représente une force $\overrightarrow{F}$ par le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ où le point A est l'origine et le point B est l'extrémité de la force. L'intensité de la force est exprimée par la nome du vecteur $\| \overrightarrow{AB} \|$ (sa longueur)(à une échelle convenable). Le sens de la flèche indique la direction de la force et l'angle θ est appelé l'angle polaire du vecteur dans le plan de la forc $\overrightarrow{F}$, et les note sous la forme polaire (F, θ)

Fig (1)

Enrichissez vos connaissances

L'angle polaire, c'est l'angle positif que fait le vecteur avec la direction positive de l'axe des abscisses.

(III): L e point d'application de la force

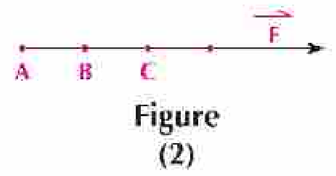
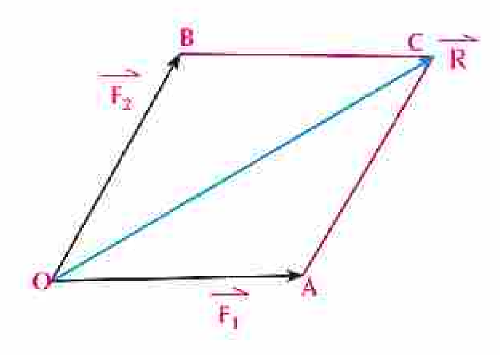


Figure (2)

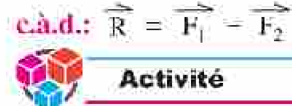
Dans la figure (1) : Généralement, le point A se coïncide au point d'action de la force $\overrightarrow{F}$, mais le déplacement du point d'application de la force $\overrightarrow{F}$ en un autre point sur la droite d'action de $\overrightarrow{F}$ ne change pas l'effet de la force sur le corps comme le montre la figure (2), Dans la figure (1) $\overleftrightarrow{AB}$ est appelée la droite d'action de la force $\overrightarrow{F}$,Donc la droite d'action d'une force est la droite passant par le point d'action de la force et parallèle à sa direction.

Résultante de deux forces concourantes:



Si deux forces agissent sur corps en un même point, la force résultante agit au même point. Cette résultante a le même effet que les deux forces Elle est représentée géométriquement par la diagonale du parallélogramme dont deux côtés consécutifs représentent les deux forces Dans la figure ci-contre, on trouve que $\overrightarrow{R}$ représentant la diagonale $\overrightarrow{OC}$ représente. la résultante des deux forces. $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$

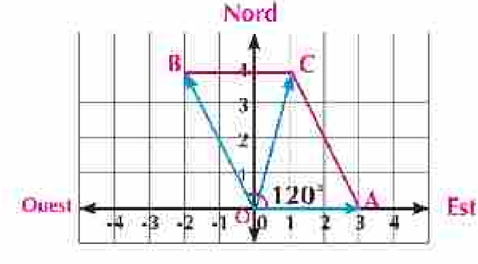
c.à.d.: $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2}$



Activité Utiliser le logiciel (Geogebra)

1. $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont deux forces agissant en un même point d'un corps rigide telles que $\overrightarrow{F_1}$ = 300 Newton agissant dans la direction de l'Est et $\overrightarrow{F_2}$ = 400 agissant dans une direction faisant un angle de 60° Nord-Ouest. Calculer la résultante de ces deux forces


Solution



Choisissez une échelle de 1 cm pour représenter 100 Newton.

Tracez $\overrightarrow{OA}$ qui représente $\overrightarrow{F_1}$ où $\| \overrightarrow{OA} \|$ = 3 cm dans la direction positive de l'axe des abscisses.

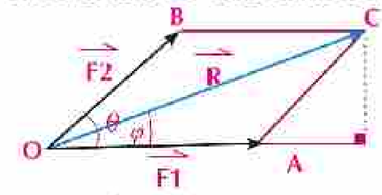
Tracez l'angle polaire $\angle$ AOB tel que m ($\angle$ AOB) = 120°

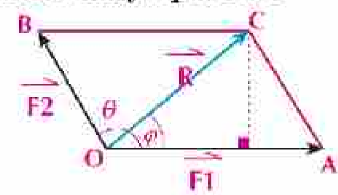
Puis tracez $\overrightarrow{OB}$ qui représente $\overrightarrow{F_2}$ où $\| \overrightarrow{OB} \| = 4$ cm.
On complète le parallélogramme OACB.
Remarque que la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ est représentée par le segment orienté $\overrightarrow{OC}$,
A l'aide du logiciel, on trouve que $\| \overrightarrow{OC} \| \simeq 3{,}6$ cm. **d'où** $R \simeq 3{,}6 \times 100 = 360$ N
Remarquez que $\overrightarrow{OC}$ forme avec $\overrightarrow{OA}$ un angle de mesure 73° 53' 53''
d'où la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est d'intensité d'environ 360 Newton qui forme un angle de mesure 73° 53' 53'' avec la direction de $\overrightarrow{F_1}$.

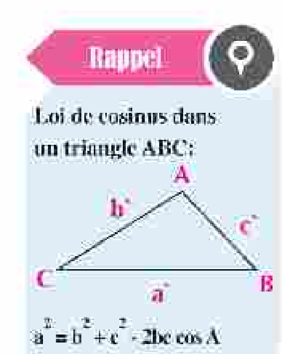
Application sur l'activité

1. Utiliser le logiciel (*GeoGebra*) pour trouvez la résultante de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ agissant en un même point d'un corps rigide telles que $\overrightarrow{F_1} = 400$ Newton agissant dans la direction de l'Est et , $\overrightarrow{F_2} = 500$ Newton agissant dans une direction faisant un angle de 80° Nord-Est.

Résultante de deux forces concourantes analytiquement







Soient $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ deux forces concourantes en un point O. Si la mesure de l'angle entre les directions de deux forces est θ et $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, représentent $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ alors $\overrightarrow{OC}$ représente la résultante $\overrightarrow{R}$.
Si φ est la mesure que fait la résultante $\overrightarrow{R}$ avec la force $\overrightarrow{F_1}$ alors d'après la loi de cosinus, nous pouvons trouvez l'intensité et la direction de la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ d'après les formules:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta} \quad , \quad \tan\varphi = \frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta}$$

où : F_1 , F_2 et R sont les intensités des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{R}$ respectivement.
Réfléchissez : Comment démontrez les formules précédentes?

Exemple

1. Deux forces d'intensités 3 et $3\sqrt{2}$ Newton sont appliquées en un point matériel. L'angle formé par leur direction mesure 45°. Trouvez l'intensité de la résultante et la mesure qu'elle fait avec la première force.

Solution

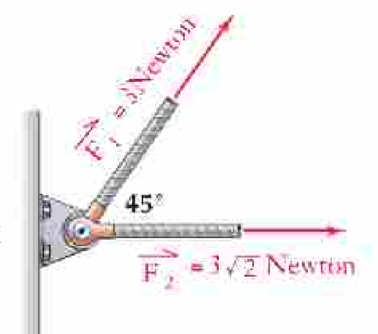
En posant: $F_1 = 3$, $F_2 = 3\sqrt{2}$, $45 = \theta°$

$\because \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta}$

$\therefore \quad R = \sqrt{(3)^2 + (3\sqrt{2})^2 + 2\times 3 \times 3\sqrt{2}\cos 45°}$

$= \sqrt{9 + 18 + 18\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ Newton

$\because \tan\varphi = \frac{F_2\sin\theta}{F_1 + F_2\cos\theta} \quad \therefore \tan\varphi = \frac{3\sqrt{2}\times\sin 45°}{3 + 3\sqrt{2}\cos 45°} = \frac{1}{2}$



En utilisant une calculatrice on a : $m(\angle\theta) = 26° \ 33' \ 54''$

Une autre solution de la deuxième partie de l'exemple: Dans la figure dessous le triangle OAB représente les forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ tel que θ_1 est la mesure de l'angle que fait la résultante $\overrightarrow{R}$ avec la ligne d'action de $\overrightarrow{F_2}$.

θ_2 est la mesure de l'angle que fait la résultante $\overrightarrow{R}$ avec la ligne d'action de la force $\overrightarrow{F_1}$

En utilisant la loi de sinus:



Remarquez que : $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$. then ;

alors : $\dfrac{F_1}{\sin\theta_1} = \dfrac{F_2}{\sin\theta_2} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$ où $\alpha = \theta_1 + \theta_2$

Nous utilisons cette formule pour trouver la mesure de l'angle que fait la résultante avec les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$

Dans l'exemple précédent:

Pour trouver la mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{F_1}$ on utilise la relation:

$$\frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad \therefore \frac{3\sqrt{2}}{\sin\theta_2} = \frac{3\sqrt{5}}{\sin 45} \qquad \text{alors } \sin\theta_2 = \frac{3\sqrt{2} \times \sin 45°}{3\sqrt{5}}$$

Donc la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force $\overrightarrow{F_1}$ est 26° 33` 54`` et c'est le même résultat déjà trouvé.

Remarque : on peut utiliser cette méthode pour résoudre les exercices.

Essayez de résoudre

2 Deux forces d'intensités 10 et 6 Newton sont appliquées en un point matériel. L'angle formé par leurs directions mesure 60°. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle que fait la résultante avec la première force.

Pensé critique: Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dans les cas suivants:

1- Si les deux forces sont orthogonales.

2- Si les deux forces sont de même intensité.

Rappel

Si $\overrightarrow{F_1} \perp \overrightarrow{F_2}$ alors :

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

$\tan\varphi = \dfrac{F_2}{F_1}$

Exemple

2 Trouvez l'intensité et la direction de la résultante pour $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dans chacun des cas suivants:

a $F_1 = 5$ Newtons et $F_2 = 12$ Newtons et la mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 90°

b $F_1 = F_2 = 16$ Newton et la mesure de l'angle de deux forces est égale à 120°

Solution

a $\because \overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont orthogonales, donc $m(\angle\theta) = 90°$ Donc $\sin(\theta) = 1$ et $\cos(\theta) = 0$

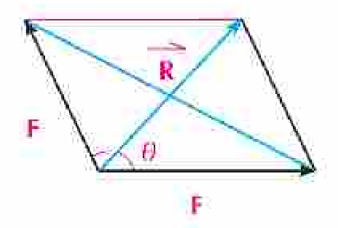
$\therefore R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ d'où $R = \sqrt{(5)^2 + (12)^2} = 13$ Newton

La direction de la résultante avec $\overrightarrow{F_1}$ est: $\tan\varphi = \dfrac{F_2}{F_1}$ d'où $\tan\varphi = \dfrac{12}{5}$

La mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{F_1}$ est 67° 22' 49''

b $\because R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos\theta}$ et en posant $F_1 = F_2 = 16$ Newtons

$\therefore R = \sqrt{(16)^2 + (16)^2 + 2 \times 16 \times 16 \cos 120} = 16$ Newton



D'après la figure ci-contre, on remarque que $F_1 = F_2 = R$ = 16 Newtons et que la résultante est une bissectrice de l'angle entre les deux forces de même intensités et que la mesure de l'angle que fait la résultante avec chacune des deux forces est égale à 60°

on remarque de la figure : $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{1}{2}R}{F}$ $\quad\therefore\quad R = 2F\cos\frac{\theta}{2}$

Essayez de résoudre

3 Trouvez l'intensité et la direction de la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ dans chacun des cas suivants:

a $F_1 = 4{,}5$ Newton, $F_2 = 6$ Newton et la mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 90°

b $F_1 = F_2 = 12$ Newton et la mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 60°

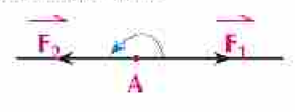
Cas particuliers:

1- Si les deux forces ont la même droite d'action et si elles sont dans le même sens:



- Dans ce cos m $(\angle\theta) = 0°$ et alors $\cos\theta = 1$ en substituant dans la formule de la résultante, on trouve que : $R = F_1 + F_2$, et la résultante a le même sens que celles des deux forces. Dans ce cas, R est appelée **la valeur maximale** de la résultante.

2- Si les deux forces ont la même droite d'action et elles sont de sens contraires:



- Dans ce cas $\theta = 180°$ et alors $\cos\theta = -1$ en substituant dans la formule de la résultante, on trouve que: $R = |F_1 - F_2|$ et la résultante a la même direction que la force de la plus grande intensité.

  Dans ce cas, R est appelée **la valeur minimale** de la résultante.

Exemple: Trouvez la valeur maximale et la valeur minimale de la résultante de deux forces d'intensités 4 et 7 Newtons.

- La valeur maximale = 4 + 7 = 11 Newtons Elle agit dans la même direction que les deux forces.
- La valeur minimale = |4 – 7| = 3 Newtons Elle agit dans la direction de la force d'intensité 7 Newton.

Exemple

3 Deux forces d'intensités F et 4 Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre les deux forces est égale à 120°. Si l'intensité de leur résultante est égale à $4\sqrt{3}$ Newton. Trouvez l'intensité de $\overrightarrow{F}$ et la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force $\overrightarrow{F}$.

Solution

Par substitution : $F_1 = F$, $F_2 = 4$, $R = 4\sqrt{3}$, $\theta = 120°$

Dans la formule : $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1\,F_2 \cos\theta$

$\therefore\ (4\sqrt{3})^2 = F^2 + (4)^2 + 2 \times F \times 4 \cos 120°$

$\therefore\ F^2 - 4F - 32 = 0$ Donc: $(F + 4)\ (F - 8) = 0$ d'où $F = -4$ refusé

Pour Trouver la mesure de l'angle entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{R}$ on utilise la formule: $\tan\varphi = \dfrac{F_2 \sin\theta}{F_1 + F_2 \cos\theta}$

$\therefore\ \tan\varphi = \dfrac{4 \times \sin 120}{8 + 4 \times \cos 120} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Donc la mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{F_1} = 30°$

Autre solution pour la deuxième partie:

Pour trouver la mesure de l'angle entre $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{R}$ on utilise la loi de sinus: $\dfrac{F_2}{\sin\varphi} = \dfrac{R}{\sin\theta}$

$\therefore\ \dfrac{4}{\sin\varphi} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sin 120}$

$\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$ En simplifiant

Donc la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force $\overrightarrow{F}$ est égale à 30°

Essayez de résoudre

4) Deux forces d'intensités 6 et F kgp sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle de deux forces est égale à 135°. Trouvez l'intensité de la résultante sachant que sa droite d'action de la résultante fait un angle de mesure 45° avec la ligne d'action de la force F.

Expression orale : Trouvez la résultante de deux forces de même intensité, de même ligne d'action et de deux sens contraires.



Complétez ce qui suit:

1) L'effet d'une force sur un corps est déterminé par ....

2) Le vecteur résultant des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est égal à ....

3) La valeur maximale de la résultante de deux forces concourantes d'intensités 4 et 6 Newton est égale à ....

4) La valeur minimale de la résultante de deux forces concourantes d'intensités 5 et 9 Newton est égale à ....

5) Deux forces d'intensités 2 et 3 N. Si la mesure de l'angle de deux forces est 60°, alors l'intensité de leur résultante est ....

Choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées:

6) L'intensité de la résultante des deux forces d'intensité 3 et 5 Newton et la mesure de leur angle est 60°, est égale à.

a) 2 Newton b) 6 Newton c) 7 Newton d) 8 Newton

(7) Si deux forces d''intensités 3 et 4 Newton ont une résultante d'intensité 5 Newton alors la mesure de l'angle de deux forces est égale à

a $30°$ b $45°$ c $60°$ d $90°$

(8) Si deux forces de même intensité 6 Newton ont une résultante d'intensité 6 Newton, alors la mesure de l'angle de deux forces est égale à

a $30°$ b $60°$ c $120°$ d $150°$

(9) Si deux forces d'intensités 3 et F Newton, la mesure de l'angle de leurs directions est de 120° et si leur résultante est orthogonale à la première force alors la valeur de F en Newton est égale à

a 1,5 b 3 c $3\sqrt{3}$ d 6

(10) Si deux forces d'intensités 6 et 8 Newton sont orthogonales, alors le sinus de l'angle que fait leur résultante avec la première force est égal à:

a $\frac{3}{5}$ b $\frac{4}{5}$ c $\frac{3}{4}$ d $\frac{4}{3}$

Répondez aux questions suivantes:

(11) Deux forces d'intensités 5 et 10 Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à 120°. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle que fait la résultante avec la première force.

(12) Deux forces d'intensités 3 et $3\sqrt{2}$ kgp sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle formé par leur directions est égale à 45°. Trouvez l'intensité et la direction de leur résultante.

(13) Deux forces d'intensités 15 et 8 kgp sont appliquées en un point matériel. Si l'intensité de leur résultante est égale à 13 kgp. Trouvez la mesure de l'angle de ces deux forces.

(14) Deux forces d'intensités 8 et F Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à 120°. Si l'intensité de leur résultante est égale à $F\sqrt{3}$ N , Trouvez la valeur de F.

(15) Deux forces d'intensités 4 et F Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre elles est égale à 135°. Si leur résultante fait un angle de 45° avec la force F. Trouvez la valeur de F.

(16) Deux forces d'intensités 4 et F Newton sont appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à 120°. Si leur résultante est orthogonale à la première force, Trouvez la valeur de F.

(17) Deux forces d'intensités F et $F\sqrt{3}$ F Newton sont appliquées en un point matériel. Si l'intensité de leur résultante est égale à 2F Newton, Trouvez la mesure de l'angle de deux forces.

(18) Deux forces d'intensités 12 et 15 Newton sont appliquées en un point matériel. Le cosinus de l'angle de ces deux forces est égal à $\frac{-4}{5}$. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle qu'elle fait avec la première force.

(19) Soient deux forces de même intensité F kgp. La mesure de leur angle est égale à 120°.Si on double les intensités des deux forces et si la mesure de leur angle devient 60°, l'intensité de leur résultante augmente de 11 kgp par rapport à la situation initiale. Trouvez la valeur de F

20) Deux forces d'intensités 12 et F kgp agissent en un point matériel. La première force agit dans la direction Est. La deuxième force agit dans la direction 60° Sud-ouest. Trouvez l'intensité de F et l'intensité de la résultante sachant que la droite d'action de la résultante agit dans la direction 30° Sud-Est.

21) F_1 et F_2 sont deux forces appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre elles est égale à 120° et l'intensité de leur résultante est égale à $\sqrt{19}$ Newton. Si la mesure de l'angle entre les deux forces devient 60°, l'intensité de la résultante sera égale à 7 Newton. Trouvez la valeur de F_1 , F_2

22) Deux forces d'intensités F et 2F kgp sont appliquées en un point matériel. Si on double l'intensité de la seconde force et on augmente l'intensité de la première force de 15 kgp, la direction de la résultante ne change pas. Trouvez la valeur de F.

Réflexion créative :

23) Deux forces de même intensité sont concourantes. L'intensité de leur résultante est égale à 12 kgp. Si on inverse la direction de l'une de ces deux forces, l'intensité de leur résultante sera égale à 6 kgp. Trouvez l'intensité de ces deux forces.

24) Soient deux forces d'intensités K et F, dont l'intensité de la résultante est 2K et la mesure de l'angle de entre les deux forces est égale à θ. Si la mesure de l'angle de deux forces devient $(180° - \theta)$, l'intensité de leur résultante diminue de moitié. Trouvez le rapport entre K et F.

25) Soient F et 2F deux forces appliquées en un point matériel. La mesure de leur angle est égale à θ et l'intensité de leur résultante est égale à ($\sqrt{5}$ F(m + 1). Si la mesure de l'angle de deux forces devient $(90° - \theta)$ et l'intensité de la résultante sera égale à $\sqrt{5}$ F (m - 1).

Démontrez que $\tan\theta = \frac{m - 2}{m + 2}$



Activité

L'intensité de la résultante des deux forces concourantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ égale à R Newton. Si on inverse le sens de F_2 la résultante deviendra R $\sqrt{3}$ Newton et la nouvelle résultante deviendra orthogonale à la première résultante. Trouvez la mesure de l'angle de deux forces.

1- Considérer que la mesure de l'angle de deux forces est θ et que la mesure de l'angle que fait la résultante avec la force F_1 est θ.

2- Trouvez $\tan\theta$ puis trouvez $\tan(90° - \theta)$ en inversant le sens de F_2

3- D'après les étapes précédentes, démontrez que $F_1 = F_2 = F$

4- En utilisant la formule de l'intensité de la résultante, trouvez la résultante des deux forces F_1 et F_2 avant et après l'inversion du sens de F_2

5- Pouvez-vous déduire que $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ pour trouver la mesure de l'angle de deux forces ? Déduisez cela à partir des relations précédentes.

6- Savez-vous d'autres méthodes de résolution ? Citez l'une de ces méthodes.



Décomposition des forces

Allez apprendre

- Décomposition d'une force en deux directions données.
- Décomposition d'une
- force en deux directions orthogonales.

Vcabulaire de base

- Composante d'une force
- Triangle de forces
- Centre de gravité

Aides pédagogiques

- Calculatrice Scientifique.
- Logiciels de Graphisme.

Préface:

En général la décomposition d'une force en plusieurs composantes consiste à trouvez un ensemble de plusieurs forces dont la force donnée est leur résultante. Notre étude se limitera à la décomposition d'une force dans deux directions données.

Décomposition d'une force en deux forces dans deux directions données

La figure (1) montre la résultante $\overrightarrow{R}$ qu'on veut décomposer dans les deux directions $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ qui forment les angles de mesure θ_1 , θ_2 respectivement avec $\overrightarrow{R}$ soient les deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$

figure (1)

La figure (2) montre le triangle de forces en remarquant que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$

(D'après les propriétés du parallélogramme)

En appliquant la loi de sinus, on trouve que :

figure (2)

$$\frac{F_1}{\sin\theta_2} = \frac{F_2}{\sin\theta_1} = \frac{R}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

Remarquez que: $\sin[180° - (\theta_1+\theta_2)] = \sin(\theta_1+\theta_2)$

Exemple

1. Décomposez une force d'intensité 12 Newton en deux composantes formant avec cette force deux angles de mesures 60° et 45° de sorte que les deux forces soient de part et d'autre par rapport à la force. Arrondissez les résultats à quatre décimales près.

Solution

En appliquant la loi de sinus:

$$\frac{F_1}{\sin 45°} = \frac{F_2}{\sin 60°} = \frac{12}{\sin 105°}$$

$$\therefore F_1 = \sin 45° \times \frac{12}{\sin 105°} \simeq 8{,}7846 \text{ Newton}$$



$$F_2 = \sin 60° \times \frac{12}{\sin 105°} \simeq 10{,}7589 \text{ Newton}$$

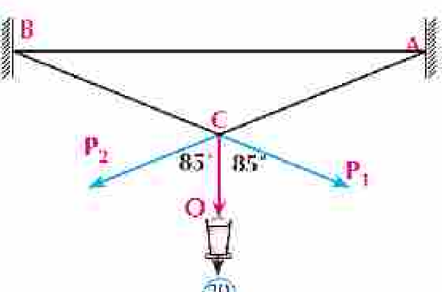
Essayez de résoudre

1. Décomposez une force d'intensité 36 Newton en deux composantes formant avec cette force deux angles de mesures 30° et 45° de sorte que les deux forces soient de part et d'autre par rapport à la force.

Exemple — **Applications de la vie quotidienne**

2. Une lampe de poids 20 Newton est suspendue par deux fils métalliques $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ inclinés sur l'horizontale de deux angles de mesure égale à 5° chacun.

   ➢ Décomposez le poids de la lampe dans les deux directions $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ Arrondissez le résultat à 1 Newton près.



Solution

On représente la force de poids (20 Newton) par un vecteur agissant verticalement vers le bas. Son point d'origine est C. On décompose le vecteur poids dans les directions des deux fils métalliques comme suit:

$$\frac{P_1}{\sin 85} = \frac{P_2}{\sin 85} = \frac{20}{\sin 170} \quad \textbf{donc:}$$

$$P_1 = P_2 = 20 \times \frac{\sin 85}{\sin 170} \quad \text{d'où:}$$

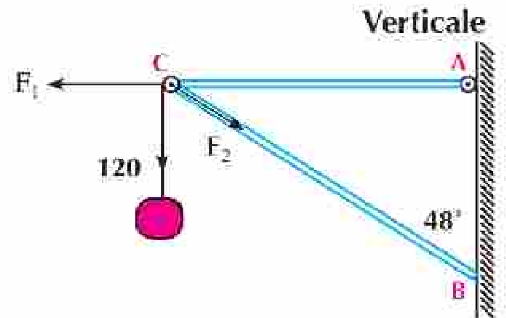
$$P_1 = P_2 = 114.73713 \quad \simeq 115 \text{ Newton.}$$

Réflexion critique: Que se passe-t-il pour les intensités des deux composantes du poids dans la direction des deux fils métalliques si la mesure de son angle avec l'horizontale est inferieure à 5° ? Que peut-on prévoir de l'intensité de la composante du poids si le fils métallique devient horizontal ? Expliquez la réponse.

Essayez de résoudre

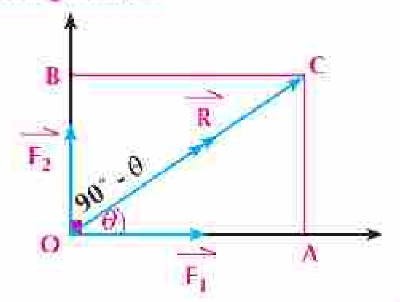
2. **Dans la figure ci-contre:**

   Décomposez la force verticale d'intensité 120 kg.p en deux composantes dont l'une est dans la direction horizontale et l'autre dans une direction qui fait un angle de mesure 48° avec la droite d'action de la forc.



Décomposition d'une force en deux directions orthogonales

Si une force $\overrightarrow{R}$ est appliquée en un point matériel (O) comme le montre la figure ci-contre et si ces deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont telles que $\overrightarrow{F_1}$ fait un angle de mesure θ avec $\overrightarrow{R}$, alors le parallélogramme ACBO, devient dans ce cas un rectangle. En appliquant la loi de sinus au triangle OAC, on obtient:



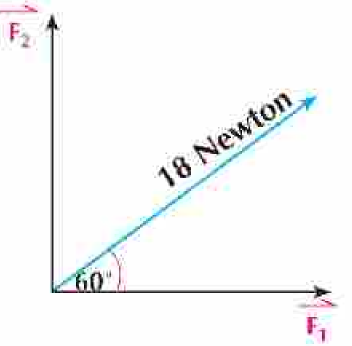
➢ $\frac{F_1}{\sin(90 - \theta)} = \frac{F_2}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin 90}$ **D'où** $\frac{F_1}{\cos\theta} = \frac{F_2}{\sin\theta} = R$

De ce qui précède, on déduit que:

➢ F_1 (l'intensité de la composante dans une direction donnée) = $R \cos\theta$

➢ F_2 (l'intensité de la composante dans la direction orthogonale à la direction donnée) = $R \sin\theta$

Exemple



(3) Décomposez la force d'intensité 18 Newton en deux directions orthogonales dont l'une fait un angle de mesure 60° avec la force.

Solution

$F_1 = 18 \cos 60° = 18 \times \frac{1}{2} = 9$ Newton

$F_2 = 18 \sin 60 = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ Newton.

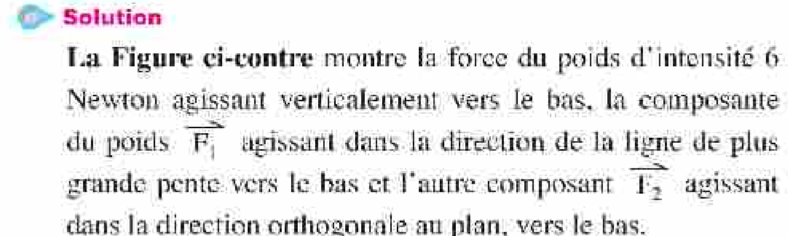
Essayez de résoudre

(3) Décomposez la force d'intensité $6\sqrt{2}$ agissant dans la direction Nord-Est en deux composantes dont l'une est dans la direction de l'Est et l'autre dans la direction du Nord.

Plan incliné

Un plan incliné est une surface qui fait un angle de mesure , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ donnée avec la verticale comme le montre la figure.

La ligne de la plus grande pente du plan est la droite illustrée dans les figures par la couleur bleue, Si on désigne la longueur de la ligne de la plus grande pente par la distance (d), la hauteur de la surface oblique par la distance **h**, et l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontale par θ alors $\sin\theta = \frac{h}{d}$.

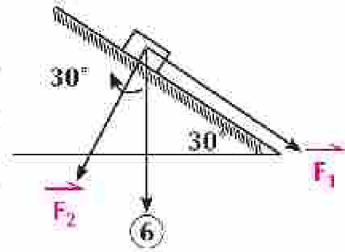


Pour lever un corps de poids (**P**), on utilise une force parallèle à la surface d'intensité (**F**) La surface oblique est utilisée pour diminuer l'effort nécessaire pour lever les corps car (**F**) est toujours inferieure au poids du corps comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple

(4) Un corps de poids 6 Newton est posé sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure 30° avec l'horizontale. Trouvez les deux composantes du poids du corps dans la direction de la plus grande pente du plan et dans la direction qui lui est orthogonale.

Solution



La Figure ci-contre montre la force du poids d'intensité 6 Newton agissant verticalement vers le bas, la composante du poids $\overrightarrow{F_1}$ agissant dans la direction de la ligne de plus grande pente vers le bas et l'autre composant $\overrightarrow{F_2}$ agissant dans la direction orthogonale au plan, vers le bas.

la composante du poids dans la direction de la ligne de plus grande pente du plan F_1

où $F_1 = 6 \sin 30 = 3$ Newton ,

$= 6 \sin 30° = 6 \times \frac{1}{2} = 3$ Newton

la composante dans la direction orthogonale ($\overrightarrow{F_2}$)

où : $F_2 = 6 \cos E$

$= 6 \cos 30° = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ Newton

Expression orale :

Les deux composantes de la force F sont-elles inferieur de -l'intensité de la force même ? Expliquer votre réponse.



Centre de gravité d'un corps rigide

C'est le point par lequel passe toujours la ligne verticale passant par le point d'accrochage lorsque le corps est accroché par n'importe quel point qui lui appartient.

(1) Par exemple : Le centre de gravité d'une boule régulière et homogène est le centre de la boule.

(2) Le centre de gravité d'une barre homogène est son milieu.

Essayez de résoudre

(5) Un corps rigide d'intensité de poids 36 Newton est posé sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure 60° avec l'horizontale. Trouvez les deux composantes du poids dans une direction parallèle à la ligne de la plus grande pente du poids vers le bas et dans la direction qui lui est perpendiculaire.

Exercices (1 - 2)

Complétez ce qui suit:

(1) Une force d'intensité 6 Newton agissant dans la direction du Nord a décompose en deux composantes orthogonales. Alors la composante de cette force dans la direction de l'Est est égale à .... Newton.

(2) on décompose une force d'intensité $4\sqrt{2}$ Newton agissant dans la direction de l'Est en deux composantes orthogonales. Alors la composante de cette force dans la direction Nord-Est est égale à .... Newton.

(3) **Dans la figure (1):**

Si on décompose la force $\overrightarrow{R}$ en deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ faisant deux angles de mesures 30° et 45° de part et d'autre par rapport à la force et si $\|\overrightarrow{R}\| = 12$ Newton.

alors: $F_1 =$ .... Newton et $F_2 =$ .... Newton.

$\overrightarrow{F_2}$ 45° $\overrightarrow{R}$ 30° $\overrightarrow{F_1}$

Figure (1)

(4) **Dans la figure (2):**

Si on décompose la force $\overrightarrow{R}$ en deux composantes $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ faisant deux angles de mesures 45° et 90° de part et d'autre par rapport à la force et si $\|\overrightarrow{R}\| = 18$ Newton, alors : $F_1 =$ ...... Newton et $F_2 =$ ...... Newton

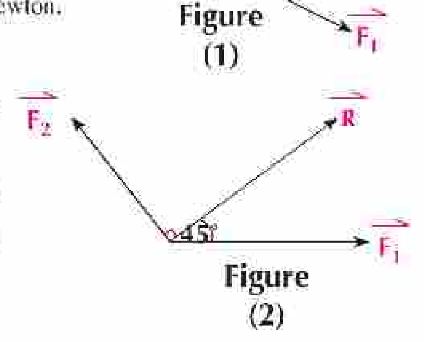


Figure (2)

5) Dans la figure (3):

On décompose la force $\overrightarrow{F}$ en deux composantes orthogonales $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ Si le vecteur force est une bissectrice de l'angle formé par les directions de $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ et si $\|\overrightarrow{F}\| = 6\sqrt{2}$ kgp.

alors: $\|\overrightarrow{F_1}\|$ = ... kgp

$\|\overrightarrow{F_2}\|$ = ... kgp

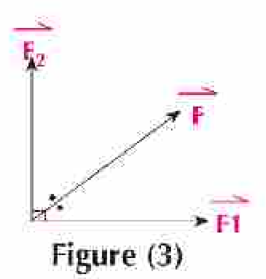


Figure (3)

6) Dans la figure (4):

Une force d'intensité $12\sqrt{2}$ Newton agit dans la direction 30° Nord-ouest.

- La composante de la force dans la direction de l'Ouest = ... Newton.
- La composante de la force dans la direction du Nord = ... Newton.

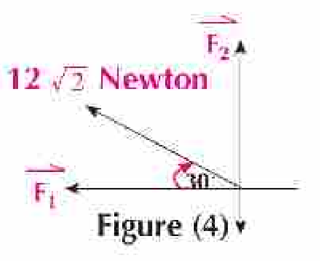


Figure (4)

7) Une force d'intensité 600 kgp agit en un point matériel. Trouvez ses deux composantes dans les deux directions faisant avec elles deux angles de mesures 30° et 45°.

8) Une force d'intensité 120 Newton agit dans la direction Nord-est. Trouvez ses deux composantes dans la direction de l'Est et dans la direction du Nord.

9) Décomposer une force horizontale d'intensité 160 kgp dans deux directions orthogonales l'une faisant un angle de mesure 30° vers le haut.

10) Une force d'intensité 18 Newton agit dans la direction du Sud. Trouvez ses deux composantes dans la direction 60° Est-sud et 30° Ouest-sud.

11) Un corps rigide de poids 42 Newton est posé sur un plan incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure 60°. Trouvez les deux composantes du poids du corps dans la direction de la ligne de la plus grande pente du plan et dans la direction qui lui est perpendiculaire.

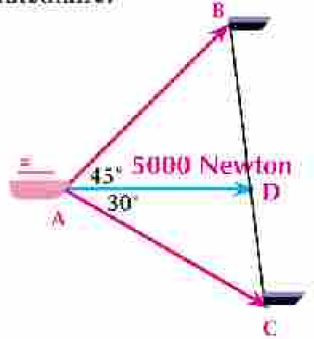
Réflexion créative :

12) On pose un corps rigide de poids 390 kgp sur un plan incliné de longueur 130 cm et de hauteur 50 cm. Trouvez les deux composantes du poids du corps dans la direction de la ligne de la plus grande pente du plan et dans la direction qui lui est perpendiculaire.

En lien avec navigation maritime

13) On veut tirer un cuirassé par deux locomotives B et C attachés par deux fils qui sont fixés par un crochet en un point A du cuirassé et la mesure de l'angle entre les deux fils est 75°.

Si la résultante des forces pour tirer le cuirassé est 5000 N et agit dans la direction de $\overrightarrow{AD}$ et l'un de deux fils fait un angle de 45° avec $\overrightarrow{AD}$. Trouvez la tension dans chacun de deux fils.





Résultante d'un système de forces coplanaires, concourantes



Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà étudié la résultante de deux forces appliquées sur un corps rigide en un point. Cette résultante est représentée géométriquement par la diagonale d'un parallélogramme dont les deux forces représentent deux côtés consécutifs. Peut-on trouver la résultante de plusieurs forces coplanaires, concourantes géométriquement ?



A apprendre

Résultantes de plusieurs forces coplanaires, concourantes géométriquement :

un système de forces ($\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, ... , $\overrightarrow{F_n}$) appliquées en un point matériel comme le montrela figure (1) Nous pouvons représenter ces forces par un polygone fermé en utilisant une échelle convenable, en traçant le vecteur $\overrightarrow{OA}$ représentant $\overrightarrow{F_1}$ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représentant $\overrightarrow{F_2}$ puis le vecteur $\overrightarrow{BC}$ représentant $\overrightarrow{F_3}$ etc. jusqu'à ce qu'on arrive à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{F_n}$ en traçant $\overrightarrow{DE}$. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ agissant dans l'ordre cyclique inverse représente la résultante des forces données telles que:

Figure (1)

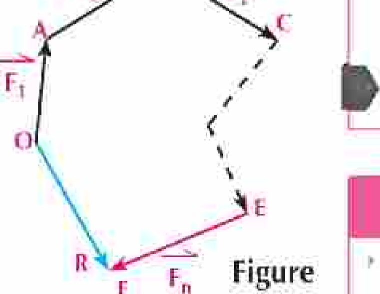


Figure (2)

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + ... + \overrightarrow{F_n}$$

Ce polygone est appelé le polygone de forces. Il est facile d'observer que la formation du polygone des forces n'est qu'une application de la règle du triangle des forces plusieurs fois consécutives.

Allez apprendre

- Résultante d'un système de forces coplanaires, concourantes géométriquement.
- Résultante d'un système de forces coplanaires, concourantes graphiquement.

Vocabulaires de base

- Résultante
- Composante algébrique
- Vecteur unitaire

Aides pédagogiques

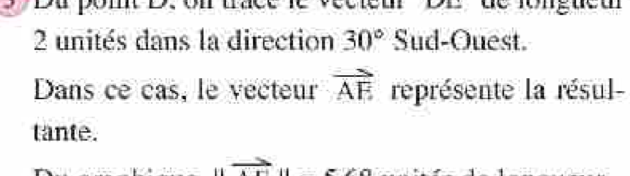
- Calculatrice scientifique
- Logiciel de graphisme



Activité — **Utilisation du logiciel (Geogebra)**

Soient $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ et $\overrightarrow{F_4}$ quatre forces appliquées sur un corps rigide telles que F_1 = 400 Newton, agissant dans la direction de l'Est, F_2 = 300 Newton, agissant dans la direction du Nord, F_3 = 500 Newton, agissant dans la direction du Nord-ouest et F_4 = 200 Newton, agissant dans une direction qui fait un angle de mesure 30° Sud par rapport à l'ouest. Trouvez la résultante de ces forces.

1. On trace les segments orientés représentant les forces à l'échelle 1 : 100
2. Du point d'origine, on trace le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de longueur 4 unités dans la direction de l'Est.
3. Du point B, on trace le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de longueur 3 unités dans la direction du Nord.
4. Du point C, on trace le vecteur $\overrightarrow{CD}$ de longueur 5 unités dans la direction Nord-ouest.
5. Du point D, on trace le vecteur $\overrightarrow{DE}$ de longueur 2 unités dans la direction 30° Sud-Ouest.



Dans ce cas, le vecteur $\overrightarrow{AE}$ représente la résultante.

Du graphique, $\| \overrightarrow{AE} \|$ = 5.68 unités de longueur.

L'intensité de la résultante = 5.68 × 100 = 568 newton

Cette résultante fait un angle de mesure 103° avec la direction de l'Est.

Résultante de plusieurs forces coplanaires, concourantes analytiquement:

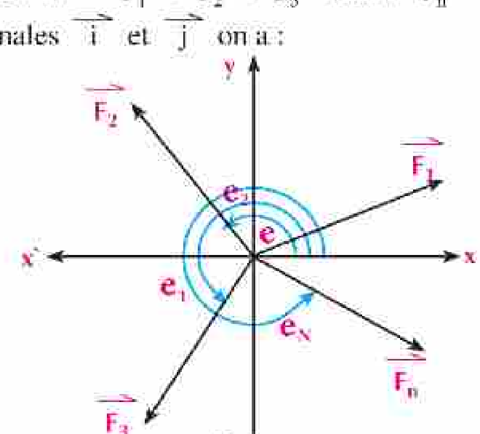
Soient des forces coplanaires $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ ......, $\overrightarrow{F_n}$ agissent en un point dans un repère orthogonal et formant des angles polaires de mesures θ_1 , θ_2 , θ_3 , ... , θ_n Si $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs unitaires dans les directions $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ alors : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + ... + \overrightarrow{F_n}$

En décomposant chaque force dans les directions orthogonales $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ on a :

$$\overrightarrow{R} = (F_1 \cos \theta_1 \overrightarrow{i} \ , \ F_1 \cos \theta_1 \overrightarrow{j})$$
$$+ (F_2 \cos \theta_2 \overrightarrow{i} \ , \ F_2 \cos \theta_2 \overrightarrow{j})$$
$$+ .... + (F_n \cos \theta_n \overrightarrow{i} \ , \ F_n \sin \theta_n \overrightarrow{j})$$

$$\overrightarrow{R} = (F_1 \cos \theta_1 + F_2 \cos {}_2\theta + ... + F_n \cos \theta_n) \overrightarrow{i}$$
$$+ (F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin {}_2\theta + ... + F_n \sin \theta_n) \overrightarrow{Y}$$

$$\overrightarrow{R} = (\sum_{r=1}^{n} F_r \cos_r \theta) \overrightarrow{i} + (\sum_{r=1}^{n} F_r \sin {}_r\theta) \overrightarrow{j}$$





Le symbole Σ est appelé le symbole de la somme et l'expression $\sum\limits_{r=1}^{n}$ désigne la somme de n éléments à partir du premier élément.

La quantité: $\sum\limits_{r=1}^{r=1} F_r\cos\theta_r$ est appelée la somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{ox}$ elle est notée X.

La quantité: $\sum\limits_{r=1}^{n} F_r\sin\theta_r$ est appelée la somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{oy}$ elle est notée Y.

alors $\overrightarrow{R} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

Dans ce cas, l'intensité de la résultante est R et θ est la mesure de son angle polaire sont telles que

$R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$

Exemple

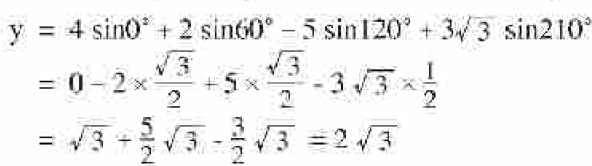
6) Soient 4 forces coplanaires agissant en un point matériel. La première force est d'intensité 4 Newton agissant dans la direction Est, la seconde force est d'intensité 2 Newton, agissant dans la direction 60° Nord-Est, la troisième force est d'intensité 5 Newton, agissant dans la direction 60° Nord-ouest et la quatrième force est d'intensité $3\sqrt{3}$ Newton, agissant dans la direction 60° Ouest-Sud. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.


Solution

Les forces d'intensité 4; 2; 5; $3\sqrt{3}$ Newton dont les angles polaires mesurent 0°, 60°, 120° et 210° respectivement pour trouver la somme algébrique des composantes de ces forces dans la direction $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$

$x = 4\cos 0° + 2\cos 60° + 5\cos 120° + 3\sqrt{3}\cos 210°$

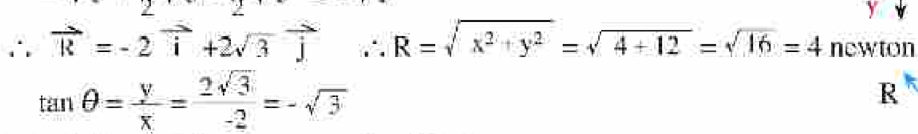
$= 4 + 2\times\frac{1}{2} - 5\times\frac{1}{2} - 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 1 - \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -2$



$y = 4\sin 0° + 2\sin 60° - 5\sin 120° + 3\sqrt{3}\sin 210°$

$= 0 - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}$

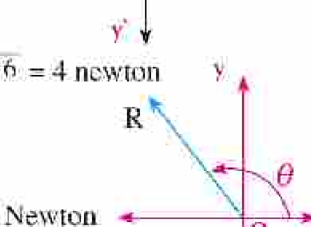
$= \sqrt{3} + \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$



$\therefore\ \overrightarrow{R} = -2\,\overrightarrow{i} + 2\sqrt{3}\,\overrightarrow{j}$ $\quad\therefore R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$ newton

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$

$\because\ x > 0,\ y < 0 \qquad \therefore\ \theta = 120°$



Donc l'intensité la résultante des forces données est égale à 4 Newton faisant un angle polaire de mesure 120°

Essayez de résoudre

1) Les forces coplanaires d'intensité 10, 20 , $30\sqrt{3}$, et 40 Newtons sont appliquées en un point matériel telles que la mesure de l'angle entre les directions des deux premières forces est 60°, celle entre la direction de la seconde et la troisième force mesure 90° et celle entre les directions de la troisième et la quatrième force mesure 150°. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante.

Exemple

7 Soit ABCDEF un hexagone régulier. Les forces d'intensité 2 , $4\sqrt{3}$, 8 , $2\sqrt{3}$ et 4 kgp au point A dans les directions $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ respectivement. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

Solution

On considère $\overrightarrow{AB}$ la direction de la première force. Donc les angles polaires des forces sont 0°, 30°, 60°, 90° et 120° respectivement.

$\therefore x = 2\cos 0° + 4\sqrt{3}\cos 30° + 8\cos 60° + 2\sqrt{3}\cos 90° + 4\cos 120°$

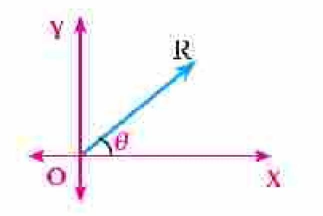
$$= 2 + 4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 8\times\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\times 0 - 4\times\frac{1}{2}$$

$$= 2 + 6 + 4 - 2 = 10 \text{ Newton}$$

$$y = 2\sin 0° + 4\sqrt{3}\sin 30° + 8\sin 60° + 2\sqrt{3}\sin 90° + 4\sin 120°$$

$$= 0 + 4\sqrt{3}\times\frac{1}{2} + 8\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} + 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ Newton}$$



$$\therefore R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(10)^2 + (10\sqrt{3})^2} = 20 \text{ Newton}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

$\because x > 0$ et $y < 0$ $\quad\therefore (\angle\theta) = 60°$

Donc la résultante agit dans la direction de $\overrightarrow{AD}$



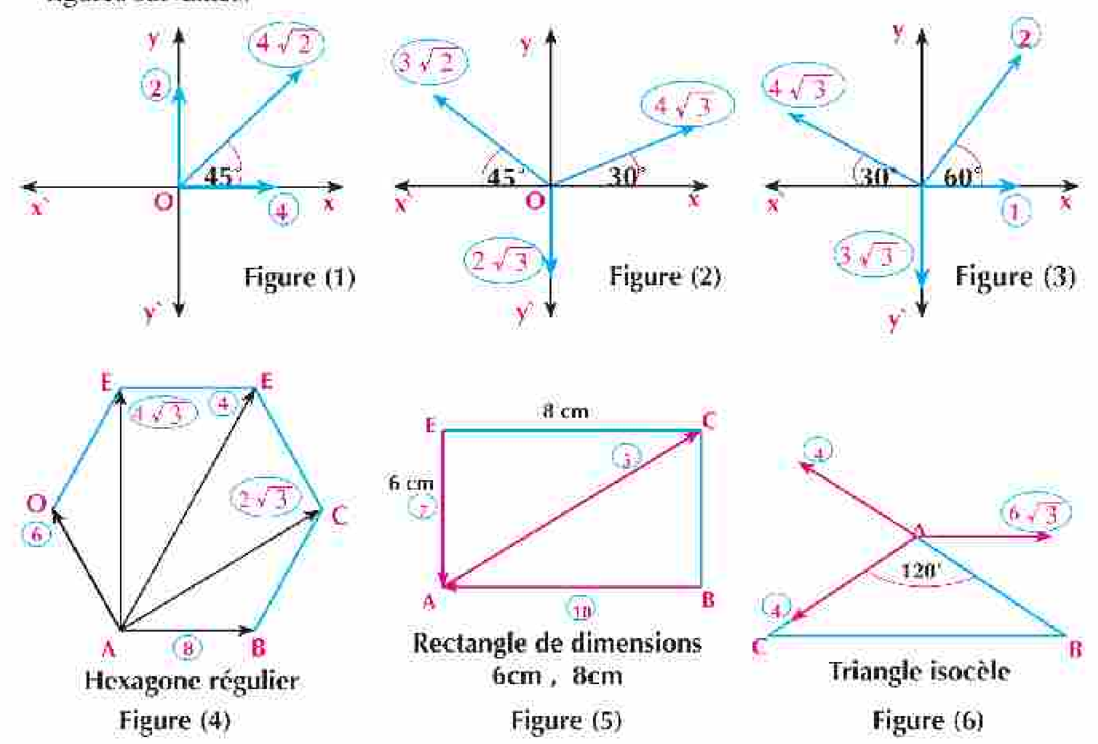
Complétez ce qui suit :

1 Soient les forces $\overrightarrow{F_1} = 2\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F_3} = 6\,\overrightarrow{i}$ alors:
L'intensité de leur résultante = ... et sa direction est = ...

2 Soient les forces $\overrightarrow{F_1} = 2\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F_2} = 4\,\overrightarrow{i} - 8\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{R} = 2a\,\overrightarrow{i} - 3b\,\overrightarrow{i}$
Alors : a = ... , b = ...

3 Soient les forces $\overrightarrow{F_1} = 3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = a\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = 4\,\overrightarrow{i} - b\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{R} = 6\,\overrightarrow{i} - 4\,\overrightarrow{j}$
Alors : a = ... , b = ...

4 Trouvez l'intensité et la direction de la résultante des forces indiquées dans chacune des figures suivantes:



5 Des forces d'intensités 3 , 6 , $9\sqrt{3}$ et 12 kgp sont appliquées en un point matériel. La mesure de l'angle entre les directions des deux premières forces est 60°, celle entre les directions de la seconde et la troisième force mesure 90° et celle entre les directions de la troisième et de la quatrième force mesure 150°. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

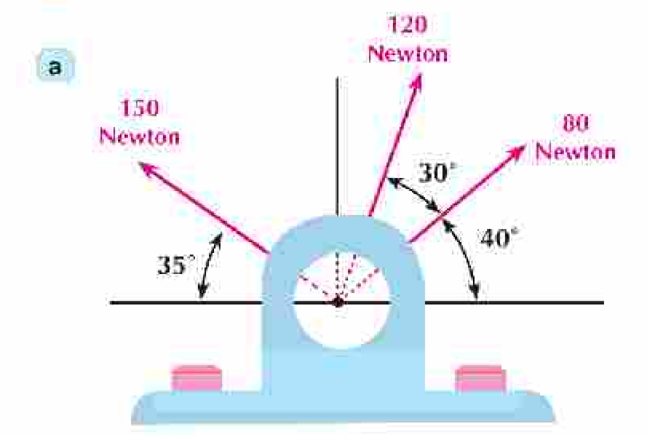
6 Trois forces d'intensité 10,20 et 30 Newton agissent en un point matériel. La première force agit dans la direction de l'Est, la seconde fait un angle de mesure 30° Ouest par rapport au Nord et la troisième fait un angle de mesure 60° Sud par rapport à l'Ouest. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

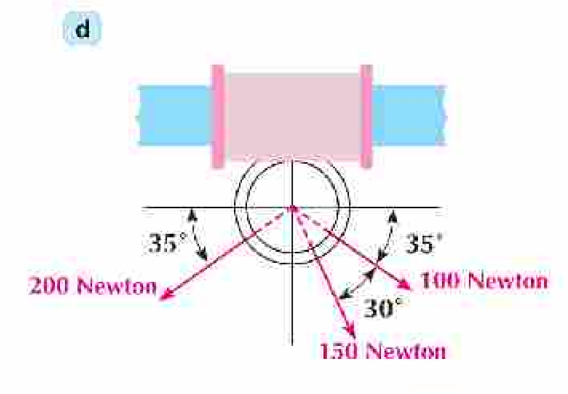
7 Quatre forces d'intensités 10 , 20 , $30\sqrt{3}$, et 40 kgp agissent en un point matériel. La première agit dans la direction de l'Est, la seconde agit dans la direction 60° Nord rapport à l'Est, la troisième agit dans la direction 30° Nord par rapport à l'Ouest et la quatrième agit dans la direction 60° Sud par rapport à l'Est. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

8 Soit ABC un triangle équilatéral. M est le point d'intersection de ses médianes. Des forces d'intensités 15 ; 20 et 25 Newton agissent au point M dans les directions $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MA}$, respectivement. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

(9) Soit ABCD un carré de longueur de côté 12 cm tel que , $E \in \overline{BC}$ et BE = 5cm. Des forces d'intensités 2 , 13 , $4\sqrt{2}$, 9 kgp agissent dans les directions $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AD}$ respectivement. Trouvez l'intensité de la résultante de ces forces.

(10) A l'aide des informations indiquées sur la figure. Trouvez l'intensité et le sens de la résultante

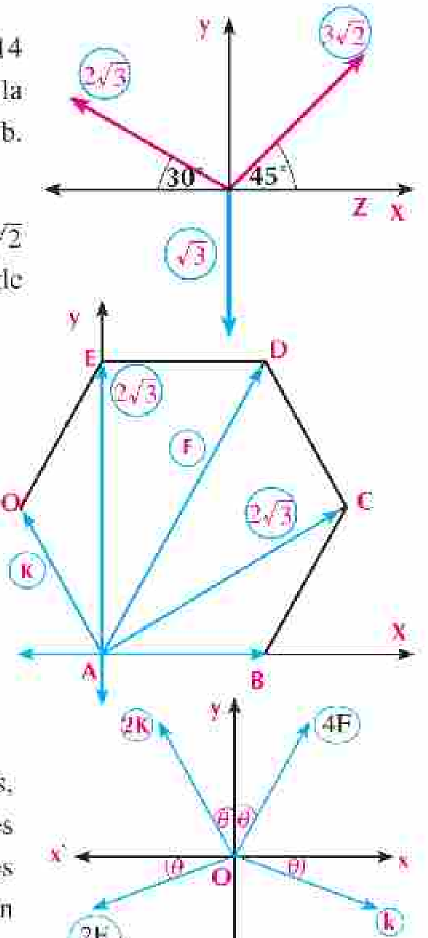




(11) Si $\overrightarrow{F_1} = 5\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = a\,\overrightarrow{i} - 6\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = -14\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$ trois forces coplanaires, concourantes et si la résultante $\overrightarrow{R} = (10\sqrt{2}\ ,\ 135°)$.Trouvez la valeur de a et b.

(12) **Dans la figure ci-contre**:

Si l'intensité de la résultante des forces est égale à $3\sqrt{2}$ Newton. ,Trouve l'intensité de F et la mesure de l'angle entre la droite d'action de la résultante et la droite d'action de F



(13) **Dans la figure ci-contre**:

si la résultante est égale à 20 kgp et agit dans la direction $\overrightarrow{AD}$ trouve les valeurs de F et K.

Réflexion créative :

(14) **La figure ci-contre:** indique quatre forces coplanaires, concourantes au point O, dans les directions indiquées telles que $\sin\theta = \frac{4}{5}$ l'intensité de la résultante de ces forces est égale à $8\sqrt{2}$ Newton et cette résultante fait un angle de mesure 135° avec $\overrightarrow{ox}$

trouvez les valeurs de F et K



Équilibre d'une particule sous l'effet de plusieurs forces coplanaires, concourantes

Si la position d'un corps rigide n'est pas changé sous l'effet de deux forces (ou plus), on dit que les deux forces (ou les forces) sont en équilibre et le corps est en équilibre. La situation la plus simple d'équilibre ce qui est d'un corps rigide sous l'effet de deux forces.

Équilibre d'un corps rigide sous l'effet de deux forces

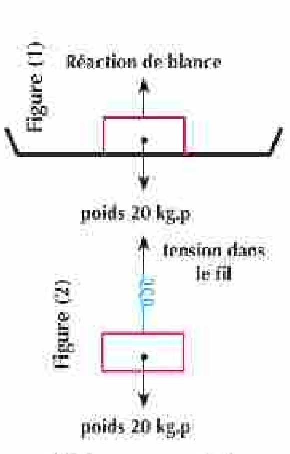


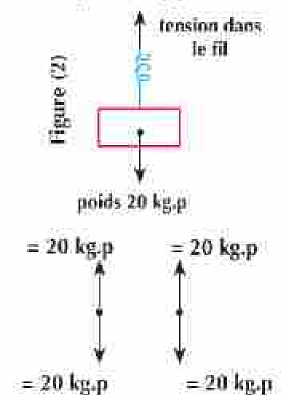
Travail coopératif

1- On pose un corps de poids 20 kgp sur le plateau horizontal et lisse d'une balance puis observez la lecture de la balance comme dans la figure (1).

2- Demandez à votre camarade d'attacher le même corps à un fil léger et lisse, et d'attacher à l'autre extrémité du fil par un dynamomètre et d'observer la lecture du dynamomètre dans l'état de repos.

3- Comparez les résultats des deux expériences. Que remarquez-vous?





On remarque que:

➢ L'intensité de la réaction dans la première expérience et l'intensité de la tension dans la deuxième expérience sont égales à 20 kgp chacune, ce qui est égal au poids du corps

Apprendre

Condition d'équilibre d'un corps rigide sous l'effet de deux forces

Un corps rigide est en équilibre sous l'effet de deux forces si les deux forces sont :

1- de même intensité.

2- de sens contraires

3- de même ligne d'action

A apprendre

- Equilibre d'un système de forces coplanaires concourantes.
- Equilibre d'un corps sous l'effet de deux forces.
- Equilibre d'un corps sous l'effet de trois forces coplanaires concourantes.
- Principe du triangle de forces.
- Principe de Lamé
- Théorème des trois forces

Vcabulaire de base

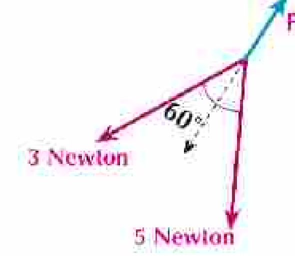
- PRINCIPE DU TRIANGLE DE FORCES
- PRINCIPE DE LAMÉ
- POLYGONE DES FORCES

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique.
- Logiciels de graphisme.

Exemple

1. Une force d'intensité F est en équilibre avec deux forces d'intensités 5 et 3 Newton. Si l'angle entre les deux droites d'action des deux dernières forces mesure 60°, Trouvez la valeur de F



Solution

On calcule la résultante des deux forces d'intensité 5 et 3 Newton d'après la formule:

$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos\theta}$ $\quad \therefore R = \sqrt{25 + 9 + 2 \times 5 \times 3 \cos 60^\circ}$

$\therefore R = \sqrt{25 + 9 + 15} = \sqrt{49} = 7$ Newton

$\because$ la force F est la résultante des deux forces d'intensité 5 et 3 Newton sont en équilibre

$\therefore F = 7$ Newton

Essayez de résoudre

1. Si la force d'intensité F est en équilibre avec les deux forces orthogonales d'intensité 5 et 12 Newton, trouvez la valeur de F.

Translation du point d'application d'une force à un autre point sur sa ligne d'action



Activité

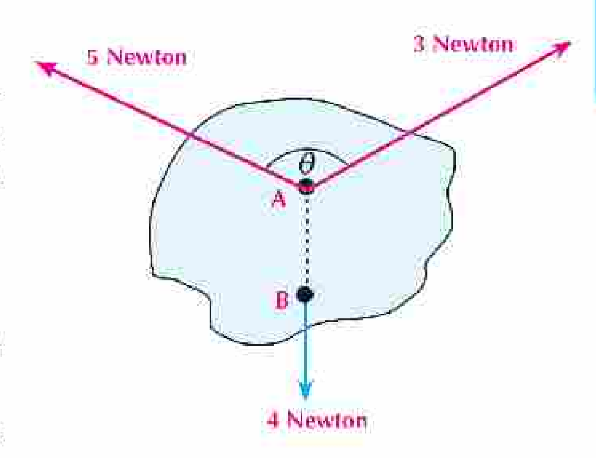


1. Préparez les outils suivants: Un dynamomètre, un disque métallique mince, des fils, un niveau à bulle, une règle.
2. Mets une table horizontalement en utilisant le niveau à bulle.
3. Attachez le disque par deux fils de deux trous A et B et les autres extrémités des fils par dynamomètres.
4. Fixez le dynamomètre en un point C de la table et tirez l'autre et le fixez en un point D de la table pour que les fils soient tendus comme dans la figure.
5. Déterminez la tension et inscrivez -la.
6. Changez la position du point A en A_1, A_2, A_3 … etc. et de même la position du point B en B_1, B_2, B_3 … etc. Observez l'écriture du dynamomètre dans chaque cas et inscrivez - les. Que remarquez - vous ? …on observe dans le cas d'équilibre, les écritures sont égales?

De l'activité précédente, on déduit que:

Si un corps est en équilibre sous l'effet de deux forces, alors on peut transmettre le point d'application de chacune de deux force à un autre point sur la ligne d'action de la force sans changer l'état du corps.

Exemple



1. Les forces 3 : 4 : 5 Newton sont en équilibres comme dans la figure ci-contre: Trouvez la mesure de l'angle de deux forces 3 et 5 Newton.

Solution

$\because$ le système des forces est en équilibre

$\therefore$ la résultante des forces 3 et 5 Newton est en équilibre avec la force 4 Newton

Posons θ la mesure de l'angle de deux forces 3 et 5 Newton, alors:

$R^2 = F^2_1 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos\theta$

Par substitution : $R = 4$ $F_1 = 3$ $F_2 = 5$

$16 = 9 + 25 + 2 \times 3 \times 5 \cos\theta$ $\qquad 30 \cos\theta = -18$ $\qquad$ Alors $\cos\theta = \frac{-3}{5}$

$\therefore m(\angle\theta) = 180° - 53° 7' 49'' = 126° 52' 11''$

Essayez de résoudre



2. Si les forces 7 : 8 : 13 Newton sont en équilibre, trouvez la mesure de l'angle de deux premières forces.

Équilibre d'un corps rigide sous l'effet de trois forces coplanaires, concourantes

Nous avons déjà étudié la condition d'équilibre d'un corps rigide sous l'effet de deux forces. On va étudier l'équilibre des trois forces coplanaires, concourantes. Ces forces peuvent appliquer à un point matériel ou à un corps de sort qu'elles soient concourantes.



A apprendre

Si on peut représenter trois forces coplanaires, concourantes par les côtés d'un triangle, prises dans un ordre cyclique, alors ces forces sont en équilibre.

Dans la figure ci-contre: Pour que les trois forces soient en équilibre, il faut que les intensités des forces soient des valeurs possibles d'être longueurs des côtés d'un triangle.

Expression orale

Lequel des systèmes des forces suivants qui peut être en équilibre ? vérifiez votre réponse. (les forces de chaque système ont des sens différents)



a 3 : 5 : 9 Newton



b 3 : 5 : 7 Newton

c 4 : 10 : 6 Newton

Principe du triangle des forces

La figure (1) représente des forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ agissant sur un corps rigide dont les directions sont $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

La résultante de ces deux forces est ($\overrightarrow{F_1}$ + $\overrightarrow{F_2}$) agissant dans la direction de la diagonale $\overrightarrow{OC}$ dans le parallélogramme OACB.

$\overrightarrow{F_3}$ est égale à ($\overrightarrow{F_1}$ + $\overrightarrow{F_2}$) et elles sont de sens contraires

Figure (1)



Donc: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{0}$ $\quad\therefore$ Les trois forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$ sont en équilibre.



Vérifiez votre compréhension :

Démontrez que le système des forces Donc $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ sont en équilibre, sachant que:

$\overrightarrow{F_1} = 2\,\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = -3\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$

La figure (2) représente le triangle des forces pour le système des forces △**ABC** represents triangle of the forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$ qui sont en équilibre, Puisque les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles aux intensités des forces correspondantes.

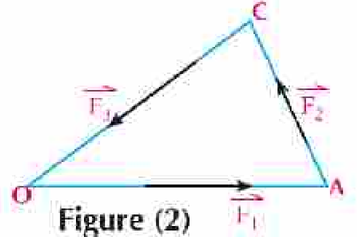


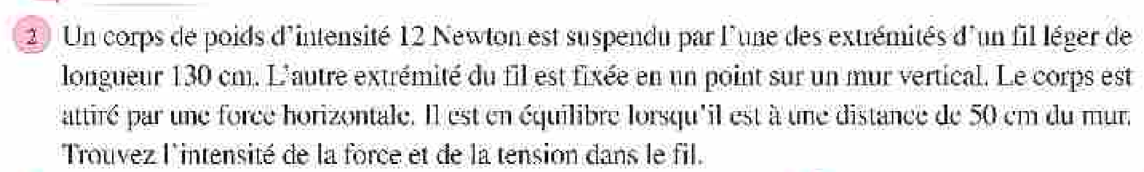
Figure (2)

Donc: $\dfrac{F_1}{OA} = \dfrac{F_2}{AC} = \dfrac{F_3}{CO}$

Alors : : Si trois forces concourantes sont équilibre, et on trace un triangle dont les côtés sont parallèles aux droites d'action des forces, alors les longueurs des côtés sont proportionnelles aux intensités des forces.

Réfléchir : Utilisez la loi des sinus pour montrer le principe du triangle des forces.

Exemple



2 Un corps de poids d'intensité 12 Newton est suspendu par l'une des extrémités d'un fil léger de longueur 130 cm. L'autre extrémité du fil est fixée en un point sur un mur vertical. Le corps est attiré par une force horizontale. Il est en équilibre lorsqu'il est à une distance de 50 cm du mur. Trouvez l'intensité de la force et de la tension dans le fil.

Solution

Le corps est en équilibre sous l'effet de trois forces:

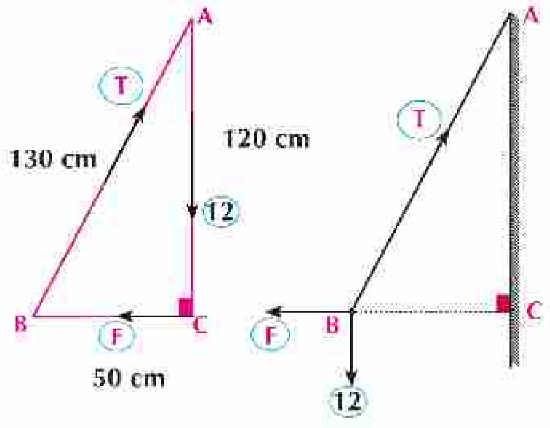
- La force du poids (12 Newton) agissant verticalement vers le bas.
- La force horizontale F.
- La tension du fil T agissant en $\overrightarrow{BA}$

On calcule la longueur $\overline{AC}$ d'après le théorème de Pythagore .

$AC = \sqrt{(130)^2 - (50)^2} = 120$ cm

BAC est le triangle des forces:

$\dfrac{T}{130} = \dfrac{12}{120} = \dfrac{F}{50}$



T = 13 Newton , F = 5 Newton

Essayez de résoudre

(3) Un corps de poids d'intensité 16 Newton est suspendu par l'une des extrémités d'un fil léger. L'autre extrémité du fil est fixée en un point sur un mur vertical. Le corps est attiré par une force dans une direction perpendiculaire au fil. Á l'état d'équilibre, le fil est incliné sur le mur d'un angle de mesure 30° . Trouvez l'intensité de la force et de la tension dans le fil.

Principe de Lamé

Si trois forces F_1 , F_2 , F_3 sont appliqués en in point matériel, comme dans la figure (1), alors On peut les représenter par les côtés d'un triangle prise dans un même ordre cyclique comme dans la figure (2)

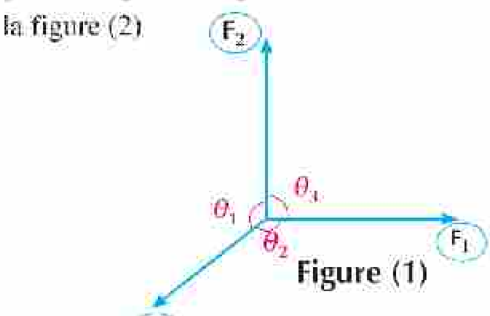


Figure (1)

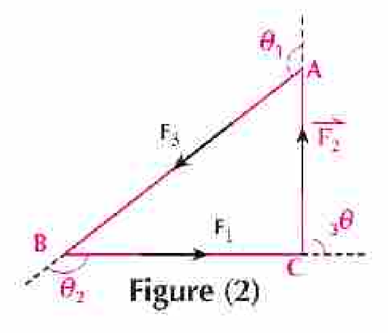


Figure (2)

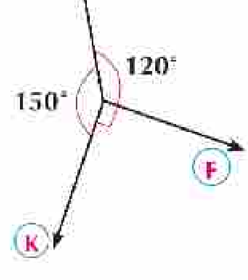
En utilisant la loi de sinus, on trouve que:

$$\frac{BC}{\sin(180° - \theta_1)} = \frac{CA}{\sin(180° - \theta_2)} = \frac{AB}{\sin(180° - \theta_3)} \quad \textbf{d'où} \quad \frac{F_1}{\sin\theta_1} = \frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{F_3}{\sin\theta_3}$$

Donc: l'intensité de chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les droites d'action des deux autres forces lorsque les trois forces concourantes sont en équilibre

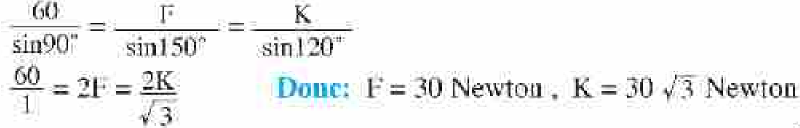
Exemple

(3) Les trois forces d'intensités 60 ; F et K sont concourantes est en équilibre. Si la mesure de l'angle entre les droites d'actions des deux premières forces est 120° et celle entre la seconde et la troisième est 90°. Trouvez la valeur de F et K.



Solution

Le système est en équilibre sous l'effet des trois forces suivantes: La force d'intensité 60 Newton, la force d'intensité F Newton et la force d'intensité K Newton. En appliquant le principe de Lamé:



$$\frac{60}{\sin 90°} = \frac{F}{\sin 150°} = \frac{K}{\sin 120°}$$

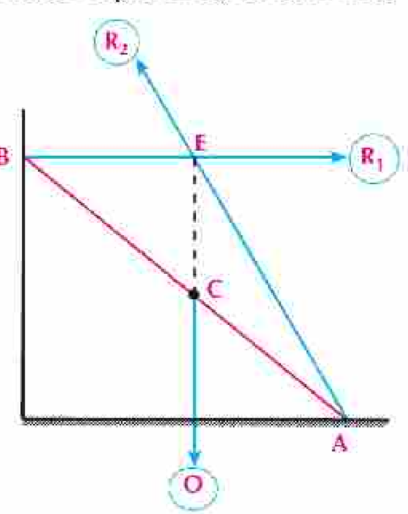
$$\frac{60}{1} = 2F = \frac{2K}{\sqrt{3}}$$

Donc: $F = 30$ Newton , $K = 30\sqrt{3}$ Newton

Essayez de résoudre

(4) La figure ci-contre montre un corps de poids d'intensité 10 Newton attaché par deux fils inclinés d'angles de mesures 30° et 40° sur l'horizontale. Trouvez T_1 et T_2 à l'état d'équilibre.

T_2 Newton
T_1 Newton
40°
30°
10 Newton



Si un corps rigide et en équilibre sous l'effet de trois forces coplanaires non parallèles alors les droites d'action de ces trois forces sont concourantes.

Exemple: Une barre homogène en épaisseur et en densité de poids (P) est posée par l'une de ses extrémités sur un mur vertical lisse et par l'autre extrémité sur un sol horizontal rugueux. Si la barre est en équilibre alors:

- Le poids de la barre P agit en son milieu dans une direction verticale vers le bas.
- La réaction du mur vertical R_1 est perpendiculaire au A mur et agit dans la direction $\overrightarrow{BD}$.
- La réaction du sol horizontal rugueux R_2, est d'une direction indéterminée. Pour déterminer sa direction on trace $\overrightarrow{AD}$ passant par le point D (le point d'intersection des droites d'action de $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R_1}$) comme l'indique la figure.

Exemple

4 Soit une sphère métallique homogène de poids 1.5 kgp et de longueur de rayon 25 cm. On l'attache par le point B de sa surface par un fil de longueur 25 cm. L'autre extrémité A du fil est fixée en un mur vertical. La sphère est en équilibre lorsqu' elle repose sur le mur. Trouvez l'intensité de la tension du fil et l'intensité de la réaction du mur sur la sphère.

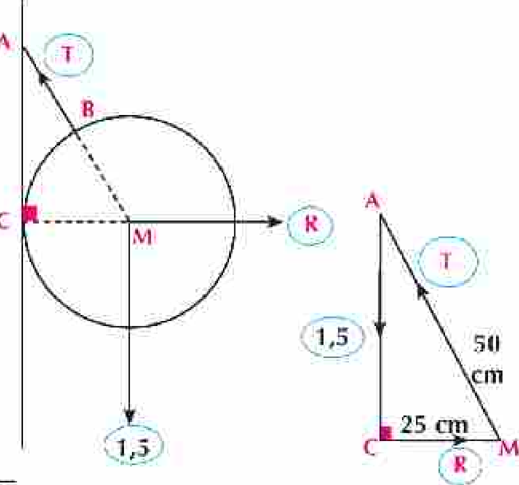


Le centre du gravité d'une sphère homogène est son centre géométrique.

Solution

La sphère est en équilibre sous l'effet de trois forces:

- Le poids de la sphère d'intensité 1.5 kgp, agissant verticalement vers le bas.
- La réaction du mur R, agissant au point de contact de la sphère avec le mur dans une direction perpendiculaire au Le centre de gravité d'une sphère est situé dans son centre géométrique. mur passant par son centre M.
- La tension du fil T agissant dans la direction . $\overrightarrow{BA}$,



et passant par le centre M, le point d'intersection des droites d'action du poids de la sphère est la réaction du mur MAC est le triangle des forces où:

MA = 25 + 25 = 50 cm.

D'après le théorème de Pythagore

$AC = \sqrt{(50)^2 - (25)^2} = 25\sqrt{3}$ cm

En appliquant le principe des triangles de forces:

$$\frac{T}{50} = \frac{1.5}{25\sqrt{3}} = \frac{R}{25} \qquad \text{D'où } T = \sqrt{3} \text{ kgp} \quad , \quad R = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kgp.}$$

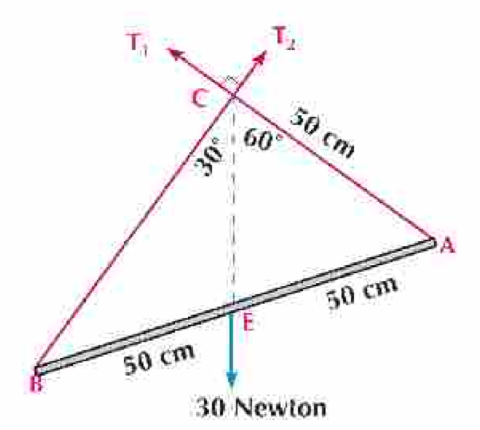
Réfléchissez: Pouvez-vous résoudre l'exercice précédent par d'autres méthodes ? Citez ces méthodes puis résolvez l'exercice par l'une de ces méthodes.

Essayez de résoudre

5) Une sphère homogène lisse de poids 100 kgp et de longueur de rayon 30 cm est accrochée en un point de sa surface par l'une des extrémités d'un fil léger de longueur 20 cm. L'autre extrémité du fil est fixée en un point d'un mur vertical lisse. Trouvez à l'état d'équilibre l'intensité de la tension du fil et la réaction du mur.

Exemple

5) Une barre homogène de longueur 100 cm et de poids 30 Newton est suspendue par deux fils fixés à ses extrémités. Ces deux fils sont fixés en un point du plafond de manière à ce qu'ils soient perpendiculaires. La longueur de l'un des deux fils est 50 cm. La barre est alors en équilibre. Trouvez l'intensité de la tension de chaque fil.



Solution

La barre est en équilibre sous l'effet de trois forces:

Son poids d'intensité 30 Newton, agissant verticalement vers le bas et passant par son milieu. Les tensions T_1 et T_2 des deux fils, agissant dans les directions $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ respectivement qui se coupent perpendiculairement au point C

$\because$ $\overline{CD}$ est issu du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse.

$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = 50cm$ $\therefore$ ACD est un triangle équilatéral

$\therefore m(\angle ACD) = 60°$, $m(\angle BCD) = 30°$

En appliquant le principe de Lamé:

$\frac{T_1}{\sin 150°} = \frac{T_2}{\sin 120°} = \frac{30}{\sin 90°}$ d'où $T_1 = 15$ Newton, $T_2 = 15\sqrt{3}$ Newton

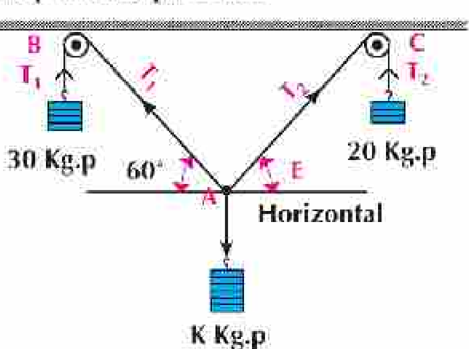
Enrichissez vos connaissances

Si un fil passe autour d'une poulie lisse et si le fil est tendu alors les intensités des tensions aux deux côtés de la poulie sont égales.

Réfléchissez: utilisez d'autres méthodes pour résoudre le problème précédent.

Exemple

6) **Dans la figure ci-contre :** un corps de poids d'intensité K est suspendu à l'extrémité d'un fil. L'autre extrémité du fil est attachée à deux fils passant autour de deux poulies lisses en B et C, portant deux masses de poids d'intensité 30 et 20 kgp. Trouvez la valeur de K et la mesure de l'angle θ à l'état d'équilibre.



Solution

Dans la figure précédente: on suppose que T_1 et T_2 sont les tensions dans les deux fils qui agissent dans les directions $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Les deux poulies sont lisses Donc $T_1 = 30$ kgp et $T_2 = 20$ kgp

Le système est en équilibre sous l'effet de trois forces qui sont:

Le poids du corps d'intensité de poids K kgp et les tensions dans les deux fils d'intensité T_1 et T_2

En appliquant le principe de Lamé:

$$\frac{30}{\sin(90^\circ + \theta)} = \frac{20}{\sin(60^\circ + 90^\circ)} = \frac{K}{\sin[180^\circ - (60 + \theta^\circ)]} \quad \text{en simplifiant}$$

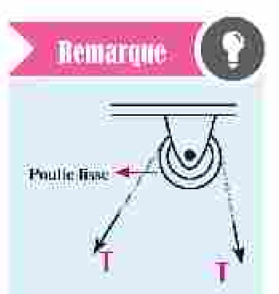
$$\frac{30}{\cos\theta} = 40 = \frac{K}{\sin(60 + \theta^\circ)}$$

Donc $\cos\theta = \frac{3}{4}$ d'où $m(\angle\theta) = 41^\circ\ 24'\ 35''$

$K = 40 \times \sin(41^\circ\ 24'\ 5'' + 60^\circ)$

d'où $K \simeq 39.2095$ kgp

Remarque



Les tensions aux deux extrémités du fil sont égales.



$\sin(90^\circ + \theta) = \cos\theta$

$\sin(180^\circ + \theta) = \sin\theta$

Essayez de résoudre

(6) La boule d'une pendule de poids d'intensité 600 kgp est déplacée jusqu'à ce que le fil fasse un angle de mesure 30° avec la verticale sous l'effet d'une force agissant sur la boule dans une direction perpendiculaire au fil. Trouvez l'intensité de la force et l'intensité de la tension au fil.

Équilibre d'un corps sous l'effet d'un système de forces coplanaires, concourantes



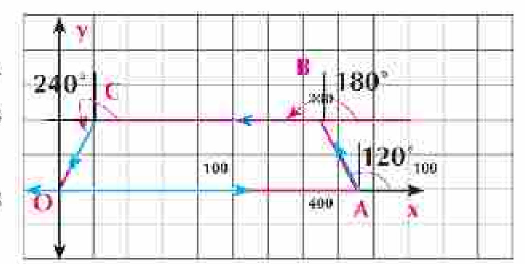
Activité

Polygone des forces

En utilisant le logiciel (Geogebra):
Représenter les forces d'intensités 400 , 100 , 300 et 100 dyne formant des angles polaires de mesures: 0° , 120° , 180° et 240° respectivement. Que remarquez-vous?

On remarque que:

- le point d'extrémité de la dernière force se superpose au point d'origine de la première force dans le polygone des forces illustré par la figure.
  Donc les forces forment le polygone des forces fermé OABC.



De cette activité, on déduit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de forces coplanaires, concourantes soit en équilibre est qu'il soit présenté par un polygone fermé

مطابع دار أخبار اليوم

Méthodes analytiques d'équilibre d'un système de forces coplanaires, concourantes:

Dans l'exemple précédent, on peut trouver la composante dans la direction de l'axe des abscisses et celle dans la direction de l'axe des ordonnées d'un système de forces comme suit.

$x = 400 \cos 0° + 100 \cos 120° + 300 \cos 180° + 100 \cos 240°$

$= 400 - 100 \times \frac{1}{2} - 300 - 100 \times \frac{1}{2} = 0$

$y = 400 \sin 0° + 100 \sin 120° + 300 \sin 180° + 100 \sin 240°$

$= 0 + 50\sqrt{3} + 0 - 50\sqrt{3} = 0$

De ce qui précède on déduit que pour qu'un système de forces coplanaires, concourantes soit en équilibre, il faut que :

- La somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{ox} = 0$
- La somme algébrique des composantes des forces dans la direction $\overrightarrow{oy} = 0$

C'est-à-dire $x = 0 , y = 0$

Exemple

1. Soient $\overrightarrow{F_1} = 5\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -7\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$

Démontrez que le système des forces $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_3}$ est en équilibre.

Solution

$\because \overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

$\therefore \overrightarrow{R} = (5 - 7 + 2)\overrightarrow{i} + (-3 + 2 + 1)\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ **Donc le système des forces est en équilibre.**

Essayez de résoudre

7. Si les forces $\overrightarrow{F_1} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -a\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{F_3} = -6\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ sont concourantes et en équilibre. Trouvez la valeur de a et celle de b.

Exemple

2. **La figure ci-contre** représente les forces d'intensités: 16 , 20 , $12\sqrt{2}$, $4\sqrt{5}$ Newton qui agissent au carré ABCD dans les directions $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{EA}$ respectivement où E et le milieu de $\overline{CD}$. Démontrez que ce système de forces est en équilibre.

Solution

D'après la figure ci-contre, on trouve que les forces d'intensités

16 , 20 , $12\sqrt{2}$ et $4\sqrt{5}$ Newton ont pour angles polaires: 0° , 90° , 225° et $(180° - \theta)$

$\therefore x = 16\cos 0° - 20\cos 90° + 12\sqrt{2}\cos 225° + 4\sqrt{5}\cos(180° + \theta)$

$= 16 + 0 - 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\sqrt{5} \times \cos\theta$

$= 16 - 12 - 4\sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$

$y = 16\sin 0° - 20\sin 90° - 12\sqrt{2}\sin 225°$

$+ 4\sqrt{5}\sin(180° + \theta)$

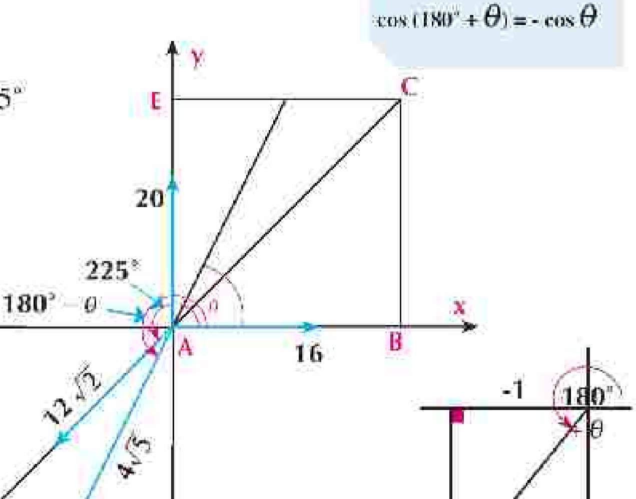
$= 0 + 20 - 12\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 4\sqrt{5}\sin\theta$

$= 20 - 12 - 4\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

$x = 0 \quad , \quad y = 0$

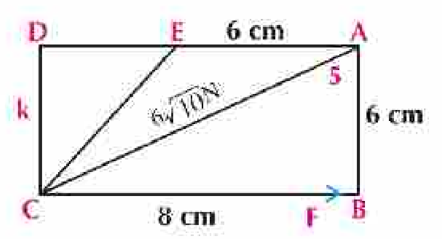
$\therefore$Le système est en équilibre.





Essayez de résoudre

(8) **La figure ci-contre** représente les forces d'intensités F . 5 , K et $6\sqrt{10}$ Newton qui sont en équilibre et qui agissent au rectangle ABDC dans les directions $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{HC}$ telles que AB = 6 cm, BC = 8 cm et AE = 6 cm. Trouvez la valeur de F et K.





Complétez ce qui suit:

(1) Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système de forces coplanaires, concourantes soit en équilibre et que les forces soient représentées géométriquement par ....

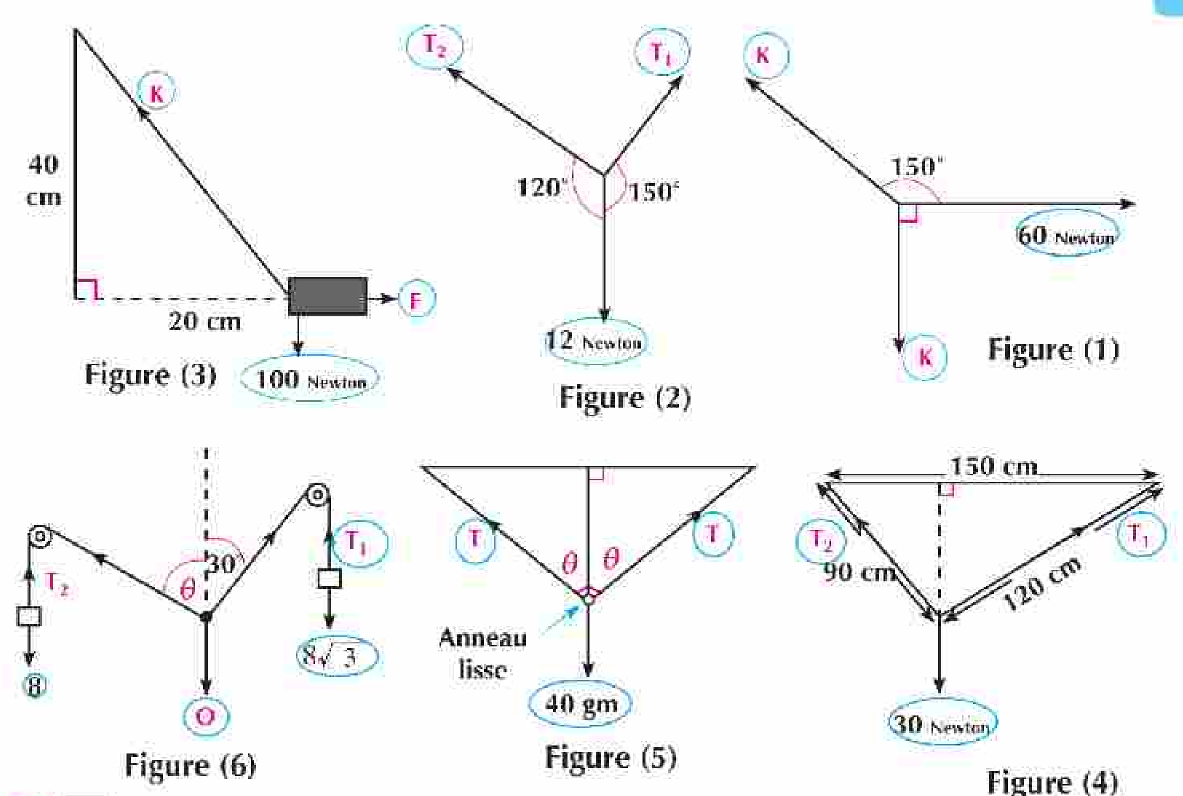
(2) La méthode analytique de l'équilibre d'un système de forces coplanaires, concourantes consiste à avoir .... et ....

(3) Si les forces $\overrightarrow{F_1} = 4\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -7\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{F_3} = a\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ sont en équilibre alors a = ... et b = ...

(4) Si la force d'intensité F est en équilibre avec deux forces orthogonales d'intensités 3 et 4 Newton, alors F = ...

(5) Si on représente trois forces coplanaires et en équilibre prises dans un ordre cyclique par les côtés d'un triangle, alors les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles aux ....

6. Chacune des figures suivantes représente un système de forces coplanaires, concourantes. Trouvez la valeur de l'inconnue que ce soit l'intensité d'une force ou la mesure d'un angle.



7. $\overline{AB}$ est une échelle homogène son poids 12 kg.p; posée par son extrémité A sur un mur vertical lisse et l'extrémité B sur une un sol horizontal rugueux, si l'extrémité A se trouve à 4m du sol et l'extrémité B se trouve à 3 m du mur. En cas d'équilibre Trouve la pression au mur et au sol .

8. $\overline{AB}$ est une barre homogène de longueur 60cm et de poids 40 newton est attaché par son extrémité A à une charnière fixée sur un mur vertical . la barre est maintenue en position horizontale à l'aide d'un fille léger attachée au point B et à l'autre extrémité à un point C du mur au dessus de A d'une distance 60cm . Trouvez l'intensité de la tension au fil et la réaction de la charnière au point A?

9. Une boule homogène repose sur deux barres parallèles situées dans le même plan horizontal . La distance entre les deux barres est égale à la longueur du rayon de la boule Trouvez la pression de la boule sur chaque barre Sachant que son poids est 60 Newton

10. $\overline{AB}$ est une barre régulière de poids P kg. P est attaché par son extrémité A à une charnière fixée sur un mur vertical . Une force horizontale $\overrightarrow{F}$ agit sur la barre au point B. La barre est en équilibre lorsqu'elle est inclinée sur la verticale d'un angle de mesure 60° . Trouve l'intensité de $\overrightarrow{F}$ et la réaction sur la charnière

(11) Un corps de poids 60 kgp est suspendu par l'une des extrémités d'un fil de longueur 28 cm. L'autre extrémité du fil est fixée au plafond d'une chambre. Une force agit sur le corps. Le corps est en équilibre lorsqu'il est à une distance de 14 cm verticalement au-dessous du plafond. Si la force dans l'état d'équilibre est perpendiculaire au fil, trouvez l'intensité de la force et l'intensité de la tension du fil.

(12) Un corps de poids 200 kgp est suspendu par deux fils de longueur 60 cm et 80 cm fixés en deux points d'une même ligne horizontale et distant de 100cm. Trouvez l'intensité de la tension dans chaque fil.

(13) Un corps de poids 200 gp est suspendu par deux fils légers dont l'un est incliné sur la verticale d'un angle de mesure θ et l'autre est incliné sur la verticale d'un angle de mesure $30°$. Si l'intensité de la tension dans le premier fil est égale à 100 gp, trouvez θ et l'intensité de la tension au second fil.

(14) Un corps de poids 800 gp est posé sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure θ sur l'horizontale où $\sin \theta = 0{,}6$. Le corps est en équilibre à l'aide d'une force horizontale. Trouvez l'intensité de cette force et la réaction du plan sur le corps.

(15) Un corps de poids P Newton est posé sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure 30°. Le corps est en équilibre à l'aide d'une force d'intensité 36 Newton agissant dans la direction de la plus grande pente du plan vers le haut. Trouvez l'intensité du poids du corps et l'intensité de la réaction du plan.

(16) Une sphère métallique homogène lisse de poids 3 Newton repose sur un mur vertical lisse et sur un plan lisse incliné d'un angle de mesure 30° sur le mur vertical. Trouvez l'intensité de la pression sur le mur vertical et sur le plan incliné.

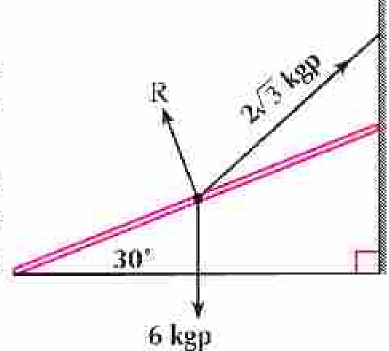
(17) Une barre homogène de longueur 50 cm et de poids 20 Newton est suspendue par deux fils fixés à ses extrémités. Ces deux fils sont fixés en un même point du plafond. Si les longueurs des deux fils sont 30 cm et 40 cm respectivement, trouvez l'intensité de la tension aux deux fils.

(18) Cinq forces d'intensité F, 6, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, et K kgp sont appliquées en un point matériel dans les directions Est, Nord, Nord-ouest, Sud-ouest et Sud respectivement. Si ce système de force est en équilibre, trouvez la valeur de F et K.

(19) Des forces coplanaires d'intensité 5 , 4 , F , 3 , K et 7 kgp agissent en un point matériel. La mesure de l'angle entre chaque, deux forces consécutives est 60°. Trouvez F et K pour que le système soit en équilibre.

Réflexion créative:

(20) **Dans la figure ci-contre** un corps de poids 6 kgp est posé sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure 30°. Il est en équilibre à l'aide d'une force d'intensité $2\sqrt{3}$ kgp agissant en un fil fixé par l'une de ses extrémités par le corps et par l'autre extrémité à un mur vertical. Trouvez la mesure de l'angle que fait le fil avec le plan et l'intensité de la réaction du plan sur le corps.



Résumé de l'unité

Unités de mesure dans le système internatianle (SI)

Grandeur de base	Languеur	Masse	Temps
Les unités de base	Mètre (m)	Kilogramme (kg)	Seconde (s)

Grandeurs derivées :

Unité	Vitesse (v)	Accélération (a)	Force (F)
Relation des unités de base	$V = \frac{D}{t}$	$a = \frac{v}{t}$	$F = m \times a$
Mesure	m/s	m/s^2	Newton

Conversion des grandeurs dérivées:

- 1 km/h $= \frac{5}{18}$ m / s ; 1 km/h $= \frac{250}{9}$ m / s ; m / s $= \frac{18}{5}$ km /h ; cm /s $= \frac{9}{250}$ km / h
- Newton = 10^5 Dynes , dyne = 10^{-5} Newton , 1 kgp = 9.8 Newtons , 1 gp = 980 Dyne.

La statique : est la science qui étudie le repos des corps sous l'effet d'un système de forces.

Poids régide : C'est un corps qui garde sa forme sans déformation quelque soit les influences extérieurs.

La force : est la mesure algébrique de l'effet mécanique sur les corps matériels.

Propriété de la force: L'effet d'une force sur un corps est déterminé par les éléments suivants :

1- son intensité. **2-** sa direction. **3-** son point d'application.

- Si l'angle entre les droites d'action de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ mesure θ et si la résultante $\overrightarrow{R}$ de ces deux forces fait un angle de mesure θ avec la force $\overrightarrow{F_1}$ alors :
- $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos\theta}$ et $\tan\varphi = \frac{F_2 \sin\theta}{F_1 + F_2 \cos\theta}$

Ou en utilisant la loi de sinus : $\frac{F_1}{\sin\theta_1} = \frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{R}{\sin\varphi}$

- La valeur maximale de la résultante de deux forces d'intensités F_1 et F_2 est égale à $| F_1 + F_2 |$ et elle agit dans le même sens que les deux forces.
- La valeur minimale de la résultante de deux forces d'intensités F_1 et $F_2 = |F_1 - F_2|$ et elle dans le sens de la plus grande force.
- Si $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont les deux composantes d'une force $\overrightarrow{R}$, et elles forment avec la ligne d'action de $\overrightarrow{R}$ deux angles de mesures θ_1 et θ_2 respectivement, alors :

$$\frac{F_1}{\sin\theta_2} = \frac{F_2}{\sin\theta_1} = \frac{R}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

- Si $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont les deux composantes orthogonales d'une force $\overrightarrow{R}$ et si la droite d'action de $\overrightarrow{R}$ fait un angle de mesure θ avec la droite d'action de la force $\overrightarrow{F_1}$ alors $F_1 = R \cos \theta$ et $F_2 = R \sin\theta$
- **Polygone de forces:** Si on représente un système de forces coplanaires, concourantes par les longueurs des côtés d'un polygone pris dans un ordre cyclique, alors la résultante de ces forces est égale à la longueur du côté fermant le polygone et dans l'ordre cyclique contraire.
- Si un système de forces coplanaires, concourantes agit dans un repère orthogonal et si les sommes des mesures algébriques des composantes de ces forces dans deux directions perpendiculaires sont x et y, alors: $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, et $\tan \theta = \frac{y}{x}$; où θ est la mesure de l'angle que fait la résultante avec $\overrightarrow{ox}$.
- Si on représente parfaitement un système de forces coplanaires, concourantes par les longueurs des côtés d'un polygone fermé alors ces forces sont en équilibre.
- Un système de forces coplanaires, concourantes est en équilibre si
  1) La somme algébrique des composantes dans la direction $\overrightarrow{ox} = 0$
  2) La somme algébrique des composantes dans la direction $\overrightarrow{oy} = 0$.
- L'équilibre d'un corps sous l'effet de deux forces signifie que les deux forces sont de même intensité, de sens contraires et ont la même droite d'action.
- **Transmettre le point d'application d'une force :** Si une force agit sur un corps rigide, on peut transmet son point d'application à un autre point sur sa droite d'action sans changer l'effet de la force sur le corps.
- **Equilibre d'un corps sous l'effet de trois forces:** si on peut représenter trois forces concourantes par les côtés d'un triangle pris dans un même ordre cyclique, alors ces forces sont en équilibre.
- **Principe de triangle des forces :** Si un corps est en équilibre sous l'effet de trois forces coplanaires, concourantes et si on considère un triangle dont les côtés sont parallèles aux droites d'action des forces, alors les longueurs des côtés du triangle sont proportionnelles aux intensités des forces correspondantes.
- **Principe de Lamé :** Si un corps est en équilibre sous l'effet de trois forces coplanaires, concourantes, alors l'intensité de chacune de ces forces est proportionnelle au sinus de l'angle formé par les deux autres forces.
- Si on peut représenter un système des forces complètement par les côtés d'un polygone fermé dans un même ordre cyclique, alors ces forces sont en équilibre.



Exercices généraux



Complétez ce qui suit:

1. Soient deux forces d'intensités 4 et F dyne et la mesure de leur angle $\in]0 ; \pi[$. Si leur résultante est une bissectrice de cet angle, alors , F = ... Dyne.

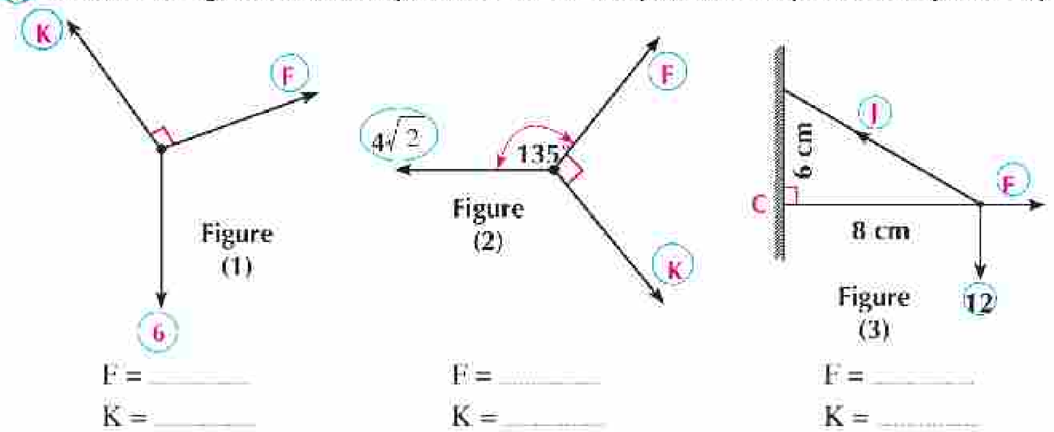
2. Si deux forces d'intensité 5 et 8 Newton agissent en un point matériel, alors la plus grande valeur de la résultante = ... Newton et la plus petite valeur de la résistante = ... Newton.

3. Si on pose un corps de poids P sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure θ alors la composante du poids dans la direction du plan est égale à ....

4. Si une force $\overrightarrow{F}$ est en équilibre avec deux forces orthogonales d'intensité 6 et 8 kgp, alors l'intensité de la force $\overrightarrow{F}$ est égale à .... kgp.

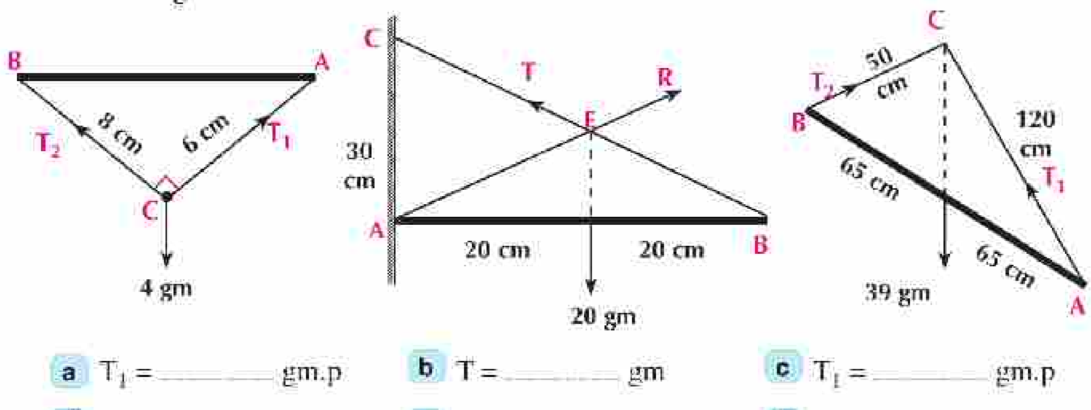
5. Si les forces $\overrightarrow{F_1} = a\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = -3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{F_3} = 9\overrightarrow{i} - b\overrightarrow{j}$ sont en équilibre alors a = ... et b = ...

6. Chacune des figures suivantes représente trois forces coplanaires en équilibre. Complétez ce qui suit:



F = ...	F = ...	F = ...
K = ...	K = ...	K = ...

7. $\overline{AB}$ est une barre homogène soumise à l'effet de trois forces coplanaires comme l'indique chacune des figures suivantes.



a T_1 = ... gm.p	**b** T = ... gm	**c** T_1 = ... gm.p
d T_2 = ... gm.p	**e** R= .... gm	**f** T_2 = ... gm .p

8) Si $\overrightarrow{R}$ est la résultante des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ et si l'angle compris entre les deux forces mesure θ et si la mesure de l'angle que fait la résultante avec F1 est égale à θ Trouvez la valeur de:

a l'intensité de $\overrightarrow{R}$, si $F_1 = 8$ Newton , $F_2 = 15$ Newton et $\theta = 90°$.

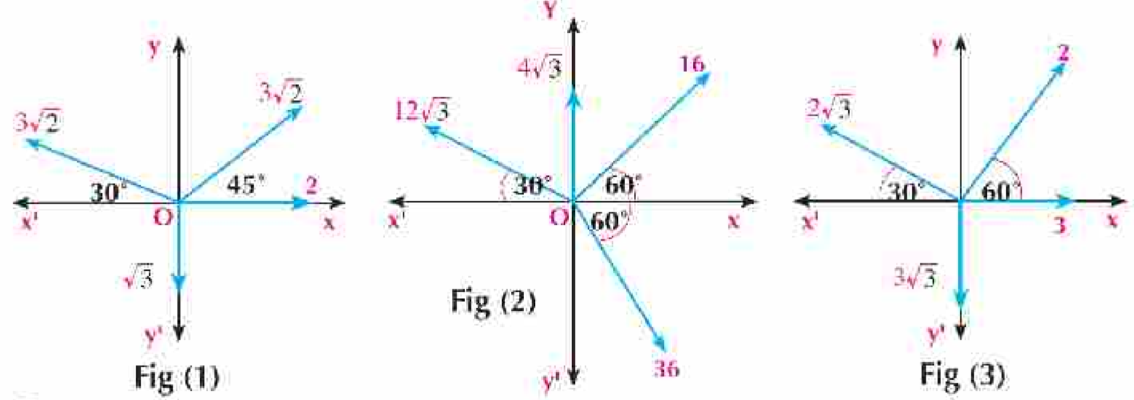
b l'intensité de $\overrightarrow{R}$ et θ si $F_1 = F_2 = 60$ dyne et $\theta = 60°$.

c l'intensité de $\overrightarrow{R}$ et θ si $F_1 = 6$ Newton , $F_2 = 3$ Newton et la résultante est orthogonale à F_2.

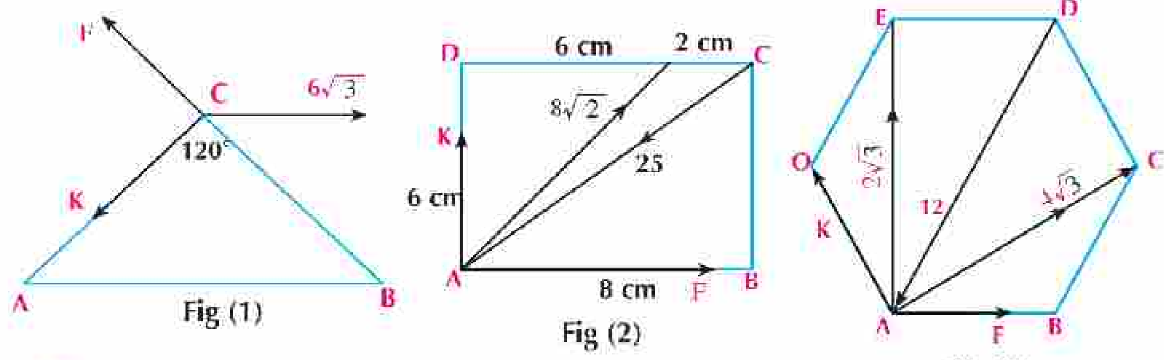
d L'intensité de $\overrightarrow{R}$ et θ si $F_1 = 3\sqrt{3}$ Newton , $F_2 = 6$ Newton et la résultante est orthogonale à $\overrightarrow{F_2}$

e l'intensité de $\overrightarrow{F_1}$ si $R = 12$ Newton , $F_2 = 12\sqrt{3}$ Newton et $\theta = 150°$

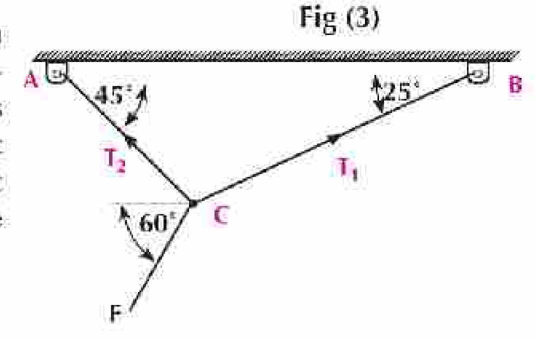
9) Trouvez l'intensité de la résultante et l'angle qu'elle fait avec le sens positif de l'axe des abscisses dans chacun des cas suivants:



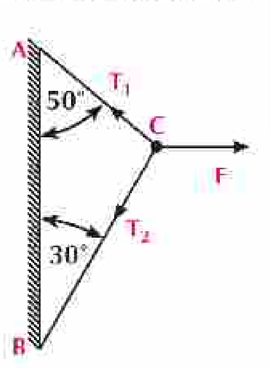
10) Trouvez la valeur de F et K pour que chacun des systèmes suivants soient en équilibre.

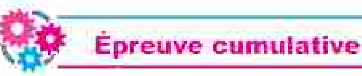


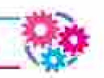
11) Une force F d'intensité 500 Newton applique au point A et fait un angle de mesure 60° avec l'horizontale. Deux fils fixés au point A et les autres extrémités sont fixés aux points B et C et faisant avec l'horizontale des angles des mesures 45° et 25° respectivement. Trouve dans le cas d'équilibre la tension dans les deux fils à un Newton près.



(12) une force horizontale F d'intensité 500 Newton applique au point C d'un fil. Les extrémités A et B du fil sont fixés à un mur vertical. Trouvez la tension dans chaque fil à un Newton près







Questions de réponse courtes :

(1) Complétez ce qui suit :

a La quantité scalaire est déterminée par ....

b La quantité vectorielle est déterminée par ....

c Le segment orienté est un segment dont ....

d Deux segments orientés sont équivalant s'ils ont ....

e La forme polaire du vecteur $\overrightarrow{M} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$ est ....

f Le vecteur qui représente une force d'intensité 20 kgp et dans la direction 30° Sud par rapport à l'Est, s'écrit à la forme cartésien ....

(2) Dans la figure ci-contre : ABCD est un parallélogramme. M est le point d'intersection de ses diagonales. Complètez :

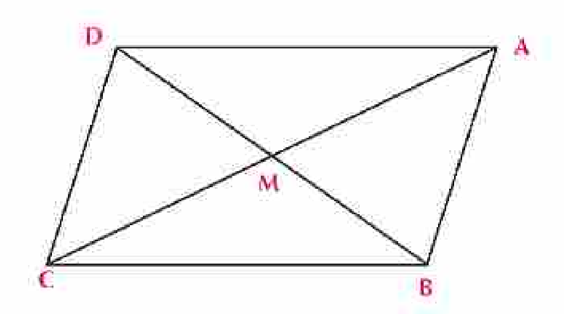
a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ ....

b $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} =$ ....

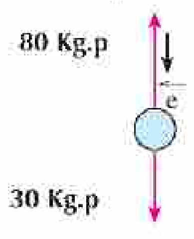
c $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM} =$ ....

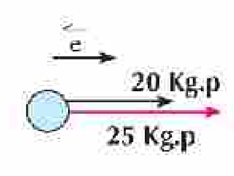
d $\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BM} =$ ....

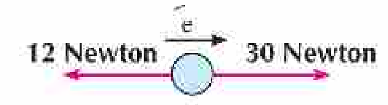
e $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} =$ ....



(3) Dans chacune des figures suivantes exprimez en fonction du vecteur $\overrightarrow{e}$ la résultante des forces représentées:







4. Dans ce qui suit, les deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ appliquent en un point matériel. Déterminez l'intensité et la direction de la résultante de deux forces si:
   - a) F_1 = 15 Newton dans la direction de l'Est , F_2 = 40 Newton dans la direction de l'Ouest.
   - b) F_1 = 34 gp dans la direction Nord-est F_2 = 34 gp dans la direction Sud-Ouest.
   - c) F_1 =50 dyne dans la direction Nord-ouest F_2 = 50 Dyne dans la direction Sud-Est.
   - d) F_1 = 30 Newton dans la direction 20° Est par rapport au Nord , F_1 = 30 Newton dans la direction 70° Nord-Est.

5. $\overrightarrow{F_1} = 7\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = A\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = -4\overrightarrow{i} + (b - 3)\overrightarrow{j}$ appliquent en un point matériel. Trouve les valeurs de a et b si:
   - a) la résultante des forces est égale à $4\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j}$
   - b) le système est en équilibre.

Questions de réponses longues

6. Deux forces d'intensités $8\sqrt{3}$ et 8 Newton agissent en un point matériel. La mesure de l'angle compris entre elles est 150°. Trouvez l'intensité de leur résultante et la mesure de l'angle qu'elle fait avec la première force.

7. Deux forces d'intensité 30 et 16 Newton agissent en un point matériel. Si l'intensité de leur résultante est 26 Newton. Trouvez la mesure de l'angle formé par les directions des deux forces.

8. Soient deux forces d'intensité 2 et F Newton et la mesure de l'angle formé par leur lignes d'action mesure 120°. Trouvez F si :
   - a) l'intensité de la résultante est égale à F.
   - b) la résultante est orthogonal à la deuxième force.
   - c) la résultante est une bissectrice de l'angle formé par les deux forces.

9. Décomposez une force d'intensité 90 Newton en deux forces d'intensités égales et formant entre elles un angle de mesure 60°.

10. Un corps de poids d'intensité 80 Newton est posé sur un plan horizontal. Trouvez l'intensité des deux composantes orthogonales du poids sachant que l'une de deux forces est inclinée sur l'horizontale d'un angle de mesure 30° vers le bas.

11. Trois forces d'intensité 2 F , 4 F et 6 F agissent en un point matériel dans des directions parallèles aux côtés d'un triangle équilatéral pris dans un ordre cyclique. Trouvez l'intensité et la direction de leur résultante

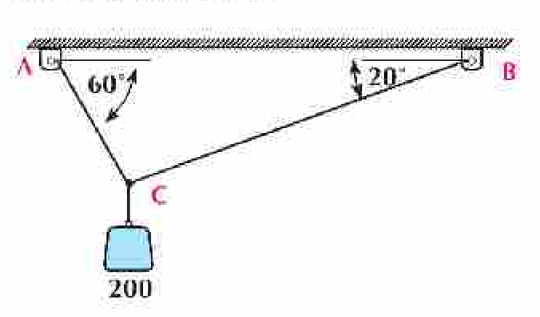
12. ABCD est un rectangle tel que AB = 8 cm , BC = 6 cm , E ∈ $\overline{CD}$ tel que ED = 6 cm Des forces d'intensité 6 , 20, $13\sqrt{3}$ et 2 newton agissent suivant $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$ respectivement. Trouvez l'intensité et la direction de la résultante de ces forces.

13. Un corps de poids 80 gp est suspendu par l'extrémité d'un fil. L'autre extrémité du fil est fixée en un point d'un mur vertical. Le corps est déplacé à l'aide d'une force perpendiculaire au fil. À l'état d'équilibre, le fil est incliné d'un angle de mesure 30° avec le mur. Trouvez, à l'état d'équilibre l'intensité de la force et l'intensité de la tension du fil .

(14) Un corps de poids 20 kgp est posé sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure θ, où $\cos\theta = \frac{4}{5}$ le corps est empêcher de se glisser à l'aide d'une force horizontale d'intensité F. Trouvez F et l'intensité de la réaction du plan.

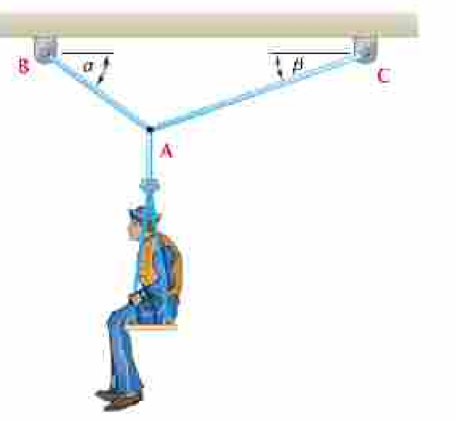
(15) Une barre homogène repose par ses deux extrémités sur deux plans lisses inclinés formant avec l'horizontale deux angles de mesures 60° et 30° . À l'état d'équilibre, Trouvez la mesure de l'angle que fait la barre avec l'horizontale. Et si l'intensité du poids de la barre est égale à 24 Newton, déterminer l'intensité de la réaction de chacun des deux plans.

(16) Dans la figure ci-contre : un corps du poids 200 Newton est suspendu verticalement d'un point C et fixé à l'aide de deux fils $\overline{BC}$ et $\overline{AC}$ qui forme deux angles des mesures 20° et 60° respectivement avec l'horizontal. Si le système est en équilibre, trouve la tension dans chaque fil à un Newton près.



(17) 

un marin sauvé en utilisant la chaise de capitaine. La chaise est Suspendue par deux fils $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ passant sur une poulie comme dans la figure ci-contre 19 Si les deux fils sont inclinés sur l'horizontal par deux angle de mesure α et β qui sont égales à 25 etrespectivement. Si la tension dans le fil $\overline{AB}$ est égale à 80 Newton, trouve les poids du marin et la chaise ensemble et la tension dans le fil $\overline{AC}$ dans le cas d'équilibre.



Si vous ne pouvez pas répondre à ces questions, vous pourez utiliser le tableau suivant :

Si vous ne pouvez pas répondre à ces questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Voir	Vecteurs	Vecteurs	Vecteurs	Vecteurs	Vecteurs	Leçon (1) 2S	Leçon (1) 2S	Leçon (1) 2S	Leçon (2) 2S	Leçon (2) 2S	Leçon (3) 2S	Leçon (3) 2S	Leçon (4) 2S	Leçon (4) 2S	Leçon (4) 2S	Leçon (4) 2S	Leçon (4) 2S

Unité 2

Dynamique



Introduction de l'unité

La mécanique étudie le mouvement des corps et les forces qui ont causé ce mouvement, elle se divise en cinématique et cinétique. Dans cette unité nous nous limiterons à l'étude de la cinématique. Cette science étudie le mouvement des corps du point de vue géométrique uniquement sans prendre en considération les forces agissant sur eux. Il est à noter que la cinématique a une application importante dans la vie pratique comme : le déplacement du mouvement dans les machines et son exigence. Dans cette unité, nous allons étudier le mouvement des corps, les phénomènes qui l'accompagnent et ses causes.



Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Comprendre que la notion de particule est un point virtuel.
- Comprendre la notion de mouvement de déplacement d'une particule d'une position à une autre.
- Comprendre que le déplacement se produit si tous les points du corps en mouvement se déplacent suivant des droites parallèles les unes aux autres pendant le mouvement.
- Distinguer le déplacement de la distance.
- Comprendre la notion de vitesse uniforme (vecteur vitesse - le mouvement uniforme - vecteur vitesse moyenne - sens de la vitesse instantanée - la vitesse relative - et les unités de mesure de la vitesse).
- Distinguer la notion vecteur vitesse moyenne et du l'intensité de la vitesse moyenne dans le cas du mouvement rectiligne.
- Appliquer les notions des : vitesse, vitesse relative et celle de l'accélération par modélisation dans des situations physiques et quotidiennes comme (mouvement des missiles, l'aviation, les satellites) dans une forme d'activités.
- Reconnaître la motion de la vitesse relative.
- Reconnaître les formules du mouvement rectiligne à une accélération uniforme- l'intensité de l'accélération $v = v_0 + at$; $D = v_0t + \frac{1}{2}at^2$; $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,d$
- Reconnaître le mouvement vertical sous l'effect de l'attraction terrestre.
- Reconnaître les applications des propriétés du mouvement rectiligne muni d'une accélération uniforme.
- Connaître les propriétés du mouvement vertical sous l'effet de l'attraction terrestre lorsque le corps monte ou descend.
- Connaître l'attraction terrestre (loi de l'attraction universelle de Newton) et la constante universelle de gravitation.
- Identifier la représentation graphique de la relation entre le déplacement et le temps et de la relation entre la vitesse et le temps.
- Utiliser une calculatrice graphique pour représenter la relation entre le déplacement et le temps et la relation entre la vitesse et le temps.



Expressions de base

- Mouvement rectiligne
- Distance
- Vecteur vitesse
- Vitesse moyenne
- Intensité de la Vitesse moyenne
- Vitesse relative
- Mouvement vertical
- Attraction universelle
- Déplacement
- Vitesse uniforme
- Vitesse instantanée
- Vecteur position
- Accélération uniforme
- Chute libre
- Attraction terrestre



Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme
- Calculatrice graphique



Leçons de l'unité

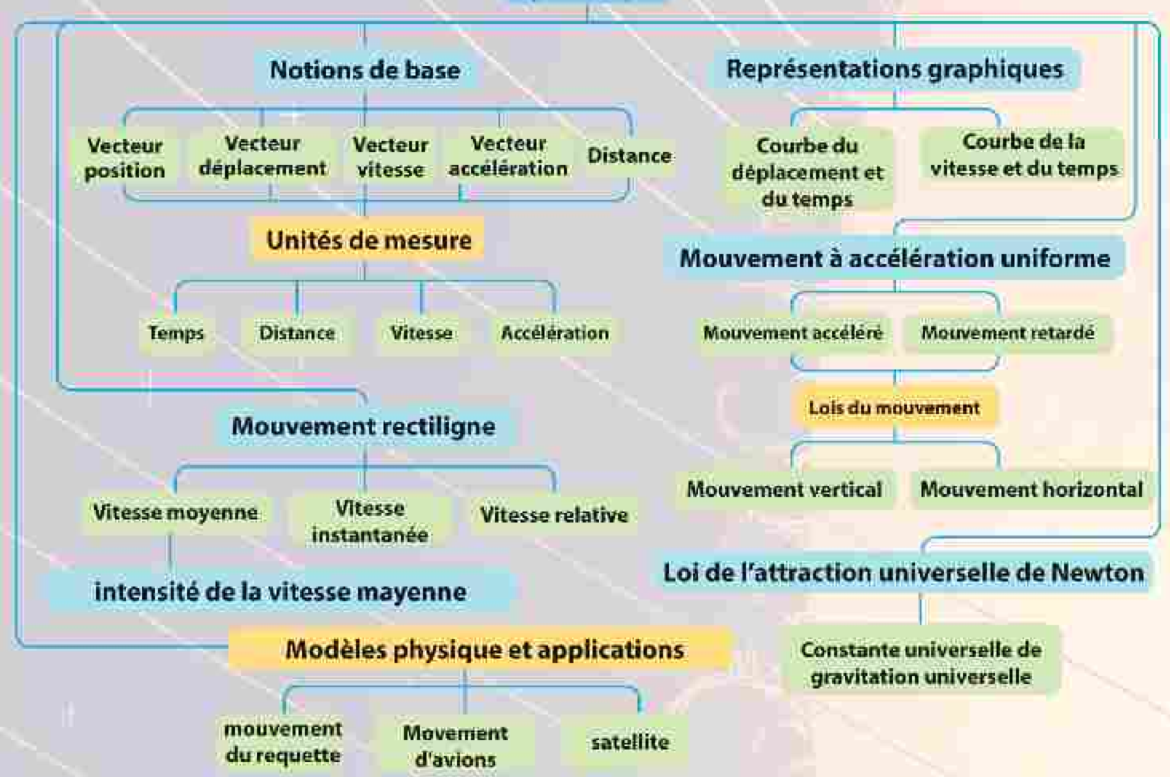
Leçon (2 - 1): Mouvement rectiligne.

Leçon (2 - 2): Mouvement rectiligne à accélération uniforme.

Leçon (2 - 3): Chute libre.

Leçon (2 - 4): Loi de l'attraction universelle.

Organigramme del'unité





Mouvement rectiligne

Allez apprendre

- Relation entre le vecteur position et le vecteur déplacement.
- Vitesse moyenne.
- Vitesse instantanée.
- Vitesse relative.

Vocabulaires de base

- Mouvement rectiligne
- Système métrique
- Vecteur déplacement
- Vecteur position
- Vecteur vitesse
- Mouvement uniforme
- Vitesse moyenne
- Vitesse instantanée
- Vitesse relative

Aides pédagogiques

- Papiers quadrillés
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Introduction :

Vous avez déjà vu quelques systèmes des mesures jusqu'à l'adoption du système décimal, inventé par les Français en 1790, qui a continué jusqu'à la parution du système international unifié SI. Ce système se compose des unités de bases de la Mécanique (masse , longueur, temps) et les unités dérivés qui se forment à partir des unités de base suivant des relations algébriques(vitesse , accélération , forces).

Mouvement

Repos et Mouvement:

Lorsqu'un corps change sa position par rapport à un autre corps au découlement du temps, on dit que le premier corps est en état de mouvement par rapport à l'autre corps. Si la position relative de deux corps ne change pas au découlement du temps, alors chacun de deux corps est en état de repos par rapport à l'autre. Le rebot et le mouvement sont deux notions relatives, les arbres et les bâtiments stables semblent en état du mouvement par rapport à un train en état de mouvement.

Types de mouvement

Il y a plusieurs types de mouvement comme le mouvement translatoire, le mouvement rotatoire et le mouvement oscillatoire. Par exemple le football projeté se déplace d'une position à l'autre en faisant un mouvement à la fois translatoire et rotatoire. Ainsi le mouvement de goutte de l'eau se déplace en faisant un mouvement à la fois transitoire et oscillatoire.

Dans ce qui suit, nous allons seulement étudier le mouvement translatoire en supposant que le corps translaté est infiniment petit, il est donc appelé une particule qui est traitée comme un point géométrique pour éviter la complexité théorique due du mouvement rotatoire et du mouvement oscillatoire que nous allons abordez dans cette étude.



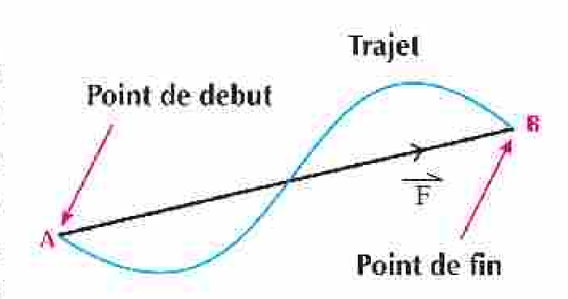
Mouvement translatoire

Le mouvement translatoire, c'est le mouvement d'un corps d'un point à l'autre le premier est appelé le point de début et l'autre est le point du fin. L'un des exemples de ce mouvement est celui d'un corps sur une ligne droite « mouvement rectiligne ».

Distance

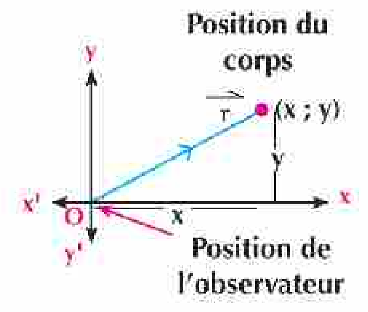
Si un train se déplace du Caire vers Mansourah, il parcourt une distance de 126 km. La distance est une quantité scalaire, il suffit donc de connaître sa valeur. Si la distance entre les deux villes est 160 km, alors le nombre 160 représente la valeur numérique et (km) est l'unité de mesure de la distance.

Vecteur déplacement



C'est le vecteur qui est représenté par le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ dont le point de début est (A) et le point du fin est (B). On le note par le symbole $\overrightarrow{D}$ et la norme du vecteur déplacement par le symbole $\|\overrightarrow{AB}\|$ .La norme du vecteur déplacement ne correspond pas forcement à la longueur du trajet fait par le corps durant le mouvement.

Vecteur position

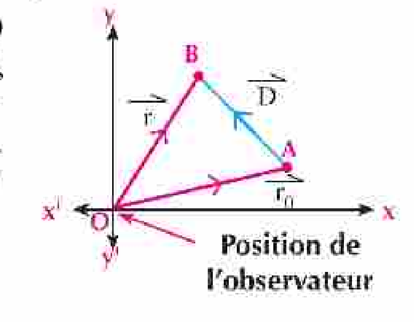


C'est le vecteur dont le point d'origine est la position de l'observateur (O) et le point d'extrémité est la position du corps observé .

On le symbolise par $\overrightarrow{r}$ tel que $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

où $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont deux vecteurs unitaires orthogonaux.

Relation entre le vecteur position et le vecteur déplacement :



Si (O) est la position d'un observateur, A(x_1 ; y_1) et B (x_2 ; y_2) sont les positions d'une particule à deux instants consécutifs, alors $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur déplacement de la particule noté $\overrightarrow{D}$

Si on symbolise le vecteur position à l'instant t par le symbole $\overrightarrow{r_0}$ le vecteur position à l'instant

(t + h) est symbolisée par $\overrightarrow{r}$, alors $\boxed{\overrightarrow{d} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}}$

$$\overrightarrow{d} = (x_2\overrightarrow{i} + y_2\overrightarrow{j}) - (x_1\overrightarrow{i} + y_1\overrightarrow{j})$$

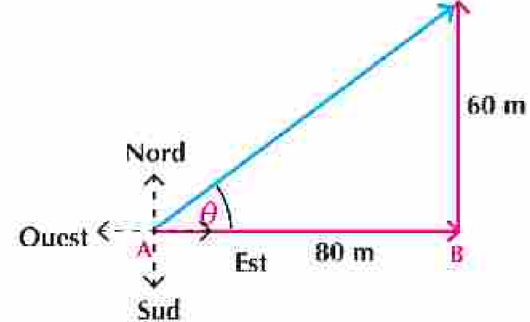
$$= (x_2 - x_1)\overrightarrow{i} + (y_2 - y_1)\overrightarrow{j} \quad , \quad \|\overrightarrow{d}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\therefore \overrightarrow{d} = \|\overrightarrow{d}\| \overrightarrow{e}$ où $\overrightarrow{e}$ est le vecteur unitaire dans le sens de $\overrightarrow{AB}$ (sens du mouvement)

Exemple

1. Un coureur s'est déplacé 80 m vers l'Est, puis 60 m vers le Nord. Calculez la distance et le déplacement parcourus par le coureur.
   Que remarquez-vous ?

Solution



La distance totale parcourue par le coureur est la somme de deux distances de A à B puis de B à C

La distance = A B + B C = 80 + 60 = 140 m

Déplacement est le segment orienté $\overrightarrow{AC}$

D'après Pythagore :

$AC = \sqrt{(80)^2 + (60)^2} = \sqrt{10000} = 100$, $\tan\theta = \frac{60}{80}$, alors $\theta = 36°\ 52'\ 12''$

C'est-à-dire la norme du déplacement = 100 m dans la direction 36° 52' 12'' Nord par rapport à l'Est.

On remarque que :

- La distance est une quantité scalaire (déterminée par sa valeur seulement) tandis que le déplacement est une quantité vectorielle (déterminée par sa norme et le sens)
- La norme du vecteur déplacement ⩽ la distance totale.

Essayez de résoudre

1. Un cycliste a parcouru 6 km vers l'Ouest puis 8 km dans la direction 60° Sud par rapport à l'Ouest.
   Calculez la distance et le déplacement parcourus par le cycliste.

2. **Pensé critique :** Si une fourmi monte un mur de 3 m de haut puis elle rentre au même point de départ. Calculez la distance et le déplacement parcourus.

Exemple

2. Une particule se déplace telle que son vecteur position $\overrightarrow{r}$ est donné en fonction du temps et en fonction des vecteurs unitaires de base $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ par la relation:
   $\overrightarrow{r}(t) = (3t + 2)\overrightarrow{i} + (4t - 1)\overrightarrow{j}$.
   Trouvez la norme du vecteur déplacement jusqu'à l'instant t = 4

Solution

$\overrightarrow{r}(0) = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{r}(4) = (3 \times 4 + 2)\overrightarrow{i} + (4 \times 4 - 1)\overrightarrow{j} = 14\overrightarrow{i} + 15\overrightarrow{j}$

$\therefore \overrightarrow{d} = \overrightarrow{r}(4) - \overrightarrow{r}(0)$

$= (14 - 2)\overleftarrow{i} + (15 + 1)\overrightarrow{j} = 12\overrightarrow{i} + 16\overrightarrow{j}$

$\therefore \|\overrightarrow{d}\| = \sqrt{144 + 256}$ $\therefore d = 20$ unités de longueur

Essayez de résoudre

3) Dans l'exemple précédent : Trouvez la norme du vecteur déplacement de l'instant t = 1 à l'instant t = 3.



La courbe (Distance - temps)

Le tableau suivant représente la relation entre le temps en seconds et la distance en mètres d'un coureur :

Temps en secondes	0	2	4	6	8	10
Distance en mètres	0	10	20	30	40	50

1 Sur un papier millimétré, représentez le temps sur l'axe des abscisses et la distance sur l'axe des ordomées.

2 Placez les coordonnées des points donnés dans le tableau.

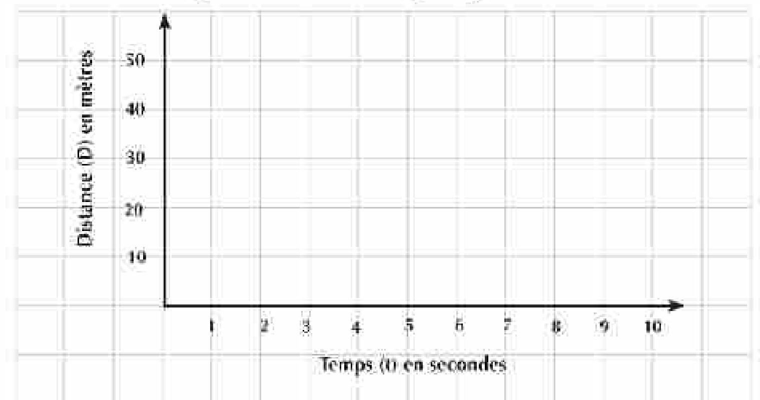
3 Utilisez une règle pour tracer la meilleure droite passant par la plus part des points du graphique.

4 A l'aide de cette droite qui représente la relation entre la distance et le temps, pouvez-vous déterminer :

a La distance parcourue après 3 seconds ?

b Le temps nécessaire pour que le coureur parcoure 45 mètres ?

5 Pouvez-vous déterminer la pente de la droite qui représente le mouvement du coureur .



la vitesse

Dans un concours, si deux coureurs font une course pendant un delais limité, alors le coureur qui parcourt la plus grande distance est plus rapide que le coureur qui parcourt la plus petite distance.

On peut déterminer l'intensité de la vitesse par la distance parcourue pendant un intervalle déterminé du temps sans prendre en compte le sens du mouvement. Le kilométrage d'un compteur de voiture indique





$1 km/h = \frac{5}{18} m/s$

$1 m/s = \frac{18}{5} km/h$

seulement l'intensité de la vitesse sans déterminer la direction de la voiture

Essayez de résoudre

4) a) Convertissez 90 km/h en m/s

b) Convertissez 15 m/s en km/h

5) Complétez le tableau suivant :

18km/h	54km/h	....km/h	90km/h	...km/h	180km/h
5 m/s	...m/s	20m/s	...m/s	30m/s	...m/s

($\times \frac{5}{18}$: km/h → m/s ; $\times \frac{18}{5}$: m/s → km/h)

Vecteur de la vitesse

Le vecteur vitesse d'un particule est le vecteur dont la norme est égale àl'intensité de la vitesse et dans la direction du mouvement.

Expression orale :

1- Comparer entre l'intensité de la vitesse et le vecteur vitesse de point du vue de :

a) La définition. b) La nature de la quantite (scalaire ou vectorielle)

Vitesse uniforme et vitesse variée

Mouvement uniforme : c'est le cas où la norme et le sens du vecteur vitesse sont constants. Il est utile de citer deux remarques importantes :

1 - L'invariance du sens du vecteur vitesse : Cela veut dire que le corps se meut dans un sens constant.

2 - L'invariance de la norme du vecteur vitesse : Cela veut dire que le corps parcourt des distances égales en des delais égaux où le corps se déplace par une vitesse d'intensité constante.

Le mouvement varié : Si le mouvement n'est pas uniforme, on dit qu'il est varié : soit la norme de la vitesse est variée ou le sens de la vitesse est varié ou bien les deux sont variés.

L'intensité de la vitesse moyenne

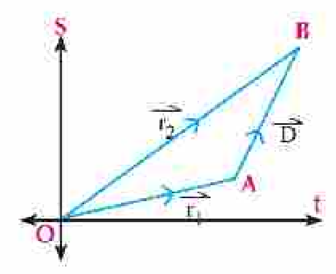
Une voiture se déplace du Caire à Hurghada. La distance entre les deux villes suivant le trajet de la voiture est égal à 510 km. Si la voiture roule à des vitesses variées entre les deux villes et le temps total du voyage est 6 heures, alors la vitesse de la voiture dans ce cas est appelée la vitesse moyenne. On a :

$$\text{Vitesse moyenne } v_m = \frac{\text{Distance totale}}{\text{Temps total}} = \frac{510}{6} = 85 \text{ Km / h}$$

D'où :

la vitesse moyenne est la distance totale du voyage divisée par le temps découlé pendant le voyage.

Vecteur vitesse moyenne

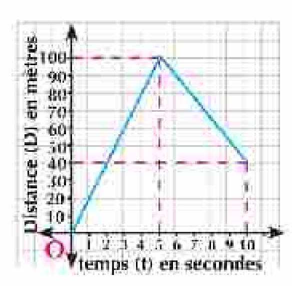


Si une particule se déplace en deux instant du temps t_1 et t_2 dans les positions A et B respectivement et si $\vec{d}$ est le vecteur déplacement durant l'intervalle du temps $(t_2 - t_1)$, alors $\vec{v_m}$ est appelé le vecteur vitesse moyenne de cette particule durant cet intervalle du temps. On a:

$$\vec{v_m} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{d}}{t_2 - t_1}$$

Exemple

3 La figure ci-contre indique la relation entre le temps et la vitesse du mouvement d'un cycliste en ligne droite à partir du point O. Trouvez :





a Le vecteur vitesse moyenne.

b L'intensité de la vitesse moyenne.

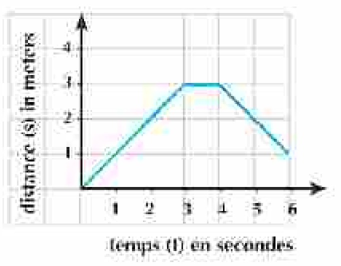
Solution

On trouve le vecteur vitesse moyenne à l'aide de deux points sur la représentation graphique

a $\vec{V_m} = \frac{40\ \vec{e}}{10} = 4\ \vec{e}$ et sa norme 4 m/s .

b $V_m = \frac{100 + 60}{10} = 16$ m/s .

Essayez de résoudre



6 La figure ci-contre est une représentation graphique d'une courbe (distance-temps) du mouvement d'une souris échappe d'un chat.

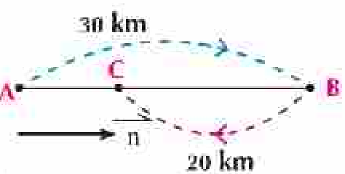
Refaire la figure si la souris à doubler sa vitesse



Exemple
Calculé la vitesse moyenne et le vecteur vitesse moyenne

4 Un cycliste a parcouru 30 km sur une route rectiligne à une vitesse de 18 km/h., puis il a parcouru une distance de 20 km sur la même route, dans le sens inverse, à une vitesse de 15 km/h. Trouvez la vitesse moyenne durant le trajet, puis trouver la vitesse mayenne.

Solution



Si le cycliste a commencé le mouvement de la position A à la position B dans la première étape puis il est retourné du point B au point C dans la seconde étape et en supposant que e est le vecteur unitaire dans la direction $\overrightarrow{AB}$.

Le temps pris dans la première étape $= \frac{d}{t}$ d'où : $t_1 = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ heures

Le temps pris dans la seconde étape $t_2 = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ heures.

Le temps total du trajet $= \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$ heures

Le déplacement $\overrightarrow{d} = 30\overrightarrow{e} - 20\overrightarrow{e} = 10\overrightarrow{e}$

$\because \overrightarrow{V_m} = \dfrac{\overrightarrow{d}}{t}$ $\qquad\qquad \therefore \overrightarrow{v_m} = \dfrac{10\overrightarrow{e}}{3} = 3\frac{1}{3}\overrightarrow{e}$

$\therefore$ Donc le vecteur vitesse moyenne a le même sens que $\overrightarrow{e}$, c'est-à-dire dans la direction de $\overrightarrow{AB}$ et sa norme est égale à $3\frac{1}{3}$ km / h.

L'intensité de la vitesse moyenne $= \dfrac{\text{total distance}}{\text{total time}} = \dfrac{30+20}{3} = \dfrac{50}{3}$ km/h

Essayez de résoudre

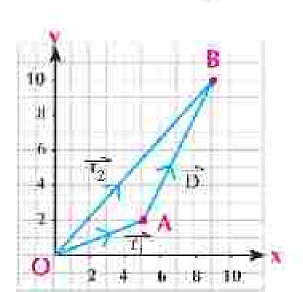
7) Un cycliste a parcouru une distance de 25 km sur une route rectiligne à une vitesse de 15 km/h puis il a parcouru une distance de 7 km sur la même route, dans le même sens, à une vitesse de 7 km/h. Calculez le vecteur vitesse moyenne durant le trajet.

Exemple

5) Une particule s'est trouvée aux deux instants du temps 3 et 7 seconde dans les positions A(5; 2) et B(9; 10) respectivement. Trouvez le vecteur vitesse moyenne de la particule durant cet intervalle du temps puis calculez la norme et la direction de la vitesse moyenne.



Solution



La figure ci-contre représente :

Le vecteur position initiale $\overrightarrow{OA}$ ($\overrightarrow{r_1}$) ,

Le vecteur position finale $\overrightarrow{OB}$ ($\overrightarrow{r_2}$) ,

Le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{d}$)

Où : $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$

$\overrightarrow{d} = (9\,;\,10) - (5\,;\,2)$

$\overrightarrow{d} = (4\,;\,8)$

$\because \overrightarrow{v_m} = \dfrac{\overrightarrow{d}}{t_2 - t_1}$

$\therefore \overrightarrow{v_m} = \dfrac{1}{(7-3)}(4\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j})$

$\overrightarrow{v_m} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ (la forme vectorielle de la vitesse moyenne)

$\|\overrightarrow{v_m}\| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$ unités de vitesse

Il fait un angle polaire dont la tangente est 2 avec $\overrightarrow{Ox}$ C.à.d : 63°26'6"

Essayez de résoudre

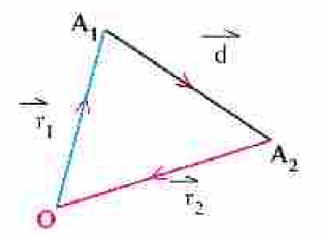
8) Une particule s'est trouvée aux deux instants du temps 3 et 8 seconde dans les positions A(7 ; 2) et B(4 ; 6) respectivement . Trouvez le vecteur vitesse moyenne de la particule durant cet intervalle du temps puis calculez la norme et la direction de la vitesse moyenne.

Vitesse instantanée

Dans la figure ci-contre :

$\because \overrightarrow{v}_m = \dfrac{\overrightarrow{d}}{t_2 - t_1} = \dfrac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1}$,

Si le délais (t_2 - t_1) est très petit de valeur moyenne t alors le vecteur vitesse dans ce cas est définie par le vecteur vitesse instantanée au moment t qui est moté $\overrightarrow{v}$





Reflichissez et discutez

Vitesse relative

Que remarquez-vous ?

- Si vous êtes assis dans un train qui se déplace et vous observez par la fenêtre les poteaux électriques et les arbres sur les deux côtés de la route.
- Si vous êtes dans une voiture qui roule à une vitesse donnée dans un sens donné et vous observez les autres voitures qui roulent dans le même sens que celui de votre voiture.
- Si les autres voitures roulent dans le sens inverse à celui de la vôtre.

De ce qui précède, on remarque que le mouvement est une notion relative qui diffère d'un observateur à un autre et d'une position à une autre. Dans tous les cas l'observateur observe les mouvements des autres corps comme s'il est au repos. Si ce n'est pas le cas, il voit les corps se déplace à des vitesses qui ne correspondent pas aux vitesses réelles de ces corps. Ce sont des vitesses relatives.

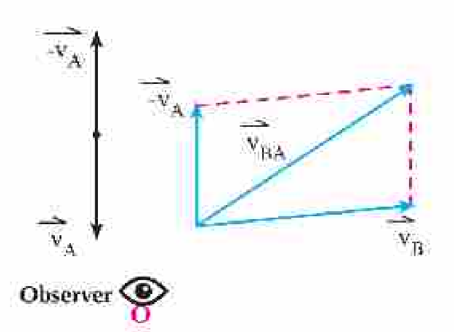
Notion de la vitesse relative:

La vitesse relative d'une particule (A) par rapport à une autre particule (B) est la vitesse à laquelle, il semble à la particule (B) que la particule (A) se déplace si on considère que la particule (B) est à l'état de repos.

Vecteur vitesse relative:

On considère $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_B}$ les vecteurs vitesses des deux corps A et B par rapport à un observateur (O) et que $\overrightarrow{v_{BA}}$ et le vecteur vitesse de B par rapport à A.

En ajoutant (- $\overrightarrow{v_A}$) à chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_B}$ des deux corps A et B où A devient au repos et le vecteur vitesse de B par rapport à A devient



($\overrightarrow{v_B}$ - $\overrightarrow{v_A}$) **d'où** $\boxed{\overrightarrow{v_{BA}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}}$

Réflexion critique : si $\overrightarrow{V}_{BA}$ est le vecteur vitesse de B par rapport à A et $\overrightarrow{V}_{AB}$ est le vecteur vitesse de A par rapport à B, écrire la relation entre $\overrightarrow{V}_{BA}$ et $\overrightarrow{V}_{AB}$

Exemple

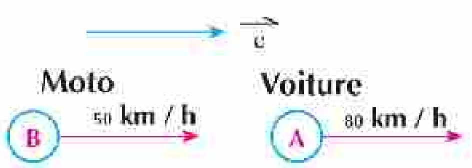
6 Une voiture roule sur une route rectiligne à une vitesse de 80 km/h. Si une moto roule sur la même route à une vitesse de 50 km/h. Trouvez la vitesse relative de la moto par rapport à la voiture sachant que :

a La moto se déplace dans le même sens que celui de la voiture.

b La moto se déplace dans le sens contraire à celui de la voiture.

Solution

On désigne la voiture par le symbole A et la moto par le symbole B. Soit $\overrightarrow{e}$ le vecteur unitaire dans le sens du mouvement de la voiture.



a Si la moto et la voiture roulent dans le même sens, on a :

$\overrightarrow{v}_B = 50\ \overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{v}_A = 80\ \overrightarrow{e}$, vitesse de la moto par rapport à celle de la voiture $\overrightarrow{v}_{BA} = ?$

$\because\ \overrightarrow{v}_{BA} = \overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A$ $\qquad \therefore\ \overrightarrow{v}_{BC} = 50\ \overrightarrow{e} - 80\ \overrightarrow{e} = -30\ \overrightarrow{e}$

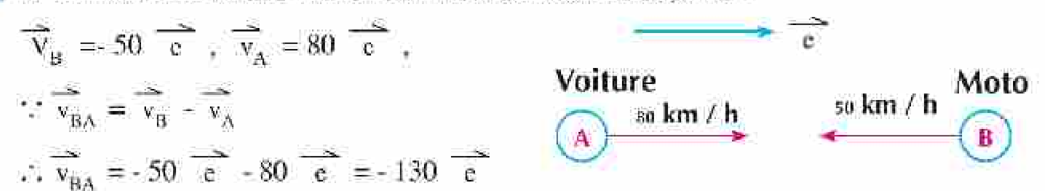
Donc la moto semble à l'observateur de la voiture roulant à une vitesse de 30 km/h, dans le sens opposé de $\overrightarrow{e}$

b Si la moto et la voiture roulent dans des sens contraires, on a :

$\overrightarrow{v}_B = -50\ \overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{v}_A = 80\ \overrightarrow{e}$,

$\because\ \overrightarrow{v}_{BA} = \overrightarrow{v}_B - \overrightarrow{v}_A$

$\therefore\ \overrightarrow{v}_{BA} = -50\ \overrightarrow{e} - 80\ \overrightarrow{e} = -130\ \overrightarrow{e}$



Donc la moto semble à l'observateur de la voiture roulant à une vitesse de 130 km/h.

Essayez de résoudre

9 Une voiture roule sur une route rectiligne à une vitesse de 72 km/h. Si une moto roule sur la même route à une vitesse de 28 km/h. Trouvez la vitesse relative de la moto par rapport à la voiture sachant que :

a la moto se déplace dans le même sens que celui de la voiture.

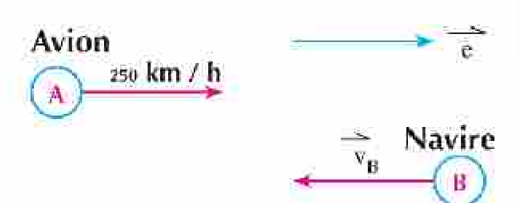
b la moto se déplace dans le sens contraire à celui de la voiture.

Exemple

7 Un navire se déplace suivant un trajet rectiligne vers un port. Lorsqu'il est à une distance de 100 km du port, un avion de garde l'a survolé dans le sens contraire à celui du navire à une vitesse de 250 km/h. En l'observant, il lui semble que le navire se déplace à une vitesse de 300 km/h. Á partir du moment de l'observation, calculez le temps nécessaire pour que le navire atteigne le port.

Solution

On désigne le navire par le symbole B et l'avion par le symbole A. Soit $\overrightarrow{e}$ le vecteur unitaire qui a le même sens que celui de l'avion. Si la vitesse réelle du navire est (dans le sens contraire de celui de l'avion)



$\therefore \ \overrightarrow{v_A} = 250 \ \overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{v_{BA}} = -300 \ \overrightarrow{e}$

$\because \ \overrightarrow{v_{BA}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A} \qquad \therefore -300 \ \overrightarrow{e} = \overrightarrow{v_B} - 250 \ \overrightarrow{e}$

D'où $\overrightarrow{v_B} = -50 \ \overrightarrow{e}$

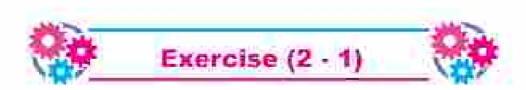
Donc la vitesse relative du navire est 50 km/h et se déplace dans le sens contraire à celui de l'avion

$\because \ \overrightarrow{d} = \overrightarrow{vt} \qquad \therefore \ 100 = 50t$

Donc t = 2 heures

Essayez de résoudre

(10) Un voiture de police roule sur une autoroute pour contrôler les vitesses. Elle roule à une vitesse de 40 km/h. Elle observe un camion roulant dans le sens contraire et lui semble que le camion roule à une vitesse de 120 km/h. Quelle est la vitesse effective du camion ?



Complétez ce qui suit:

(1) 20m/s = ________ km/h

(2) 90 km/h = ________ m/s

(3) Une voiture roule à une vitesse uniforme de 72 km/h pour une durée d'un quart d'heure. Alors la distance parcourue = ... km.

(4) Si $\overrightarrow{v_A} = 15 \ \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v_B} = 22 \ \overrightarrow{i}$ alors $\overrightarrow{v_{BA}} =$ ....

(5) Si $\overrightarrow{v_{AB}} = 65 \ \overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{v_A} = 50 \ \overrightarrow{e}$ alors $\overrightarrow{v_B} =$ ________

(6) Un cycliste A se déplace sur une route rectiligne à une vitesse de 15 km/h. Un autre cycliste B se déplace dans le même sens à une vitesse de 12 km/h. Alors la vitesse de B par rapport à A est égale à ________ km/h.

Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

(7) Si une voiture roule à une vitesse uniforme de 75 km/h pour une durée de 20 minutes, alors la distance parcourue en kilomètre est égale à ________ km

a 15 **b** 20 **c** 25 **d** 30

8) Le temps pris par une voiture roulant à une vitesse de 20 m/s pour parcourir une distance de 180 km est égale à .... hours

a $1\frac{1}{2}$ b -2 c $2\frac{1}{2}$ d 3

9) Si $\overrightarrow{v_{AB}} = 15\ \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{v_A} = 35\ \overrightarrow{i}$ alors $\overrightarrow{v_B}$ est égale à :

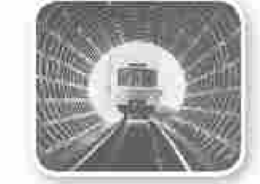
a $-50\ \overrightarrow{i}$ b $-20\ \overrightarrow{i}$ c $20\ \overrightarrow{i}$ d $50\ \overrightarrow{i}$

10) Si le vecteur position d'une particule, se déplaçant en une ligne droite à partir d'un point O, est donné en fonction du temps par la relation : $\overrightarrow{r} = (2t^2 + 3)\ \overrightarrow{e}$ sachant que la norme de $\overrightarrow{r}$ mesurée en mètre alors la norme du vecteur $\overrightarrow{D}$ déplacement après deux secondes est égale à :

a 4m b 6m c 8m d 11m

11) **En lien avec l'astronomie :** Si la lumière arrive du soleil à la terre en 8,3 minutes, la distance du soleil au terre est 1.494×10^{11} m. Calculez la vitesse de la lumière.

12) Deux voitures roules de Benha au Caire en même temps à une vitesse uniforme de 70 km/h pour la premier et de 84 km/h pour la deuxième. Trouvez le temps d'attente du chauffeur de la deuxième voiture pour que le chauffeur du premier voiture lui rejoint sachant que le trajet est de 49 km



13) Un train de longueur 150 mètres entre dans un tunnel rectiligne de longueur l mètres. Pour qu'il traverse totalement le tunnel, il a pris 15 secondes. Trouvez la longueur du tunnel sachant que le train se déplace à une vitesse uniforme de 90 km/h

14) Un cycliste parcourt une distance de 30 km sur une route rectiligne à une vitesse de 15 km/h puis il retourne dans le sens inverse et parcourt une distance de 10 km à une vitesse de 10 km/h. Trouvez le vecteur vitesse moyenne durant le trajet.

15) Un homme se déplace sur une route rectiligne. Il parcourt 800 mètres à une vitesse de 9 km/h puis il parcourt la même distance dans le même sens à une vitesse de 4,5 km/h. Trouvez la vitesse moyenne de l'homme durant le trajet.

16) Soient deux villes A et B situées sur la route côtière distantes de 120 km. Une voiture roule de la ville A vers la ville B à une vitesse de 88 km/h. Au même instant, une autre voiture roule de la ville B vers la ville A à une vitesse de 72 km/h. Où et quand les deux voitures se rencontrent-elles ?

17) Une voiture A roule sur une route rectiligne à une vitesse de 60 km/h. Une autre voiture B roule sur la même route à une vitesse de 90 km/h. Trouvez la vitesse de la voiture A par rapport à la voiture B sachant que :

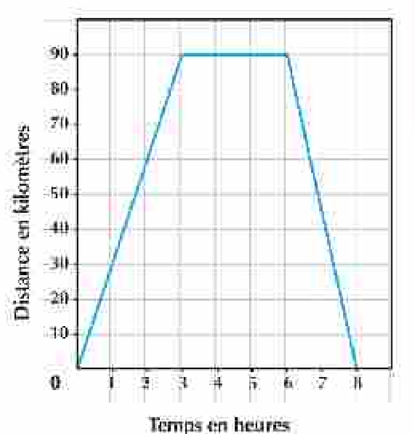
a les deux voitures roulent dans deux sens contraires.

b les deux voitures roulent dans le même sens.

18) Une voiture de police roule à une vitesse uniforme sur une route horizontale. Elle observe que la vitesse relative d'un camion, roulant devant elle et dans le même sens, est de 60 km/h. Lorsque la voiture de police double sa vitesse, il lui semble que le camion est au repos. Trouvez la vitesse réelle de la voiture de la police et celle du camion.



Activité (1)



19 La figure ci-contre représente la relation entre la distance en kilomètre et le temps en heure concernant le trajet d'une moto se déplaçant entre deux villes. Répondre aux questions suivantes .

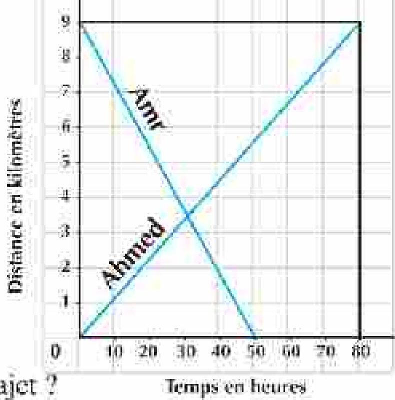
- **a** Quelle est la vitesse moyenne de la moto durant l'allée ?
- **b** Quelle est la vitesse moyenne de la moto durant le retour ?
- **c** Que représente le segment horizontal dans la figure

20 Une moto se déplaçe à une vitesse uniforme , une minute après, elle se trouve à une distance de 2 km d'un point A. 3 minutes après, elle se trouve à une distance de 5 km du même point. Tracez une figure représentant la relation entre la distance et le temps concernant le trajet de la moto. Du graphique :

- **a** Trouvez la vitesse de la moto?
- **b** Ecrivez la relation mathématique entre le temps (t) et la distance (D).



Activité (2)



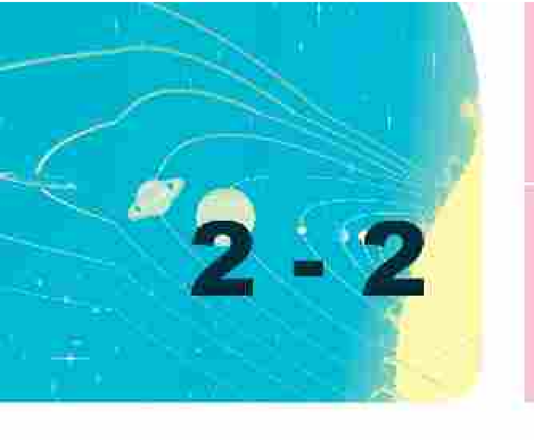
21 La figure ci-contre illustre le trajet pris par Ahmed et Amr pour parcourir la distance entre deux villages, l'un partant d'un village et l'autre partant de l'autre village.

- **a** Ahmed et Amr ont-ils commencé leur parcours au même temps? vérifiez votre réponse?
- **b** Au bout de combien de minutes Ahmed et Amr se sont-ils rencontrés ?
- **c** Quel est le temps pris par Ahmed pour parcourir le trajet ?
- **d** Calculez la vitesse d'Amr.
- **e** Si Amr commence le mouvement à 9h 30 du matin, à quelle heure arrive-t-il à l'autre village ?

22 Si le vecteur position $\overrightarrow{r}$ d'une particule se déplaçant en ligne droite partant d'un point O est donné en fonction du temps t par la relation : $\overrightarrow{r} = (t^2 - 3t - 2)\ \overrightarrow{e}$ où $\overrightarrow{e}$ est le vecteur unitaire constant, Trouvez le vecteur déplacement après 4 secondes.

23 Une particule se trouve aux instants 3 et 8 secondes aux deux positions A(4 ; 3) et B(12 ; 9) respectivement. Trouvez le vecteur vitesse moyenne de la particule pendant cet intervalle du temps puis trouvez la norme et le sens de la vitesse moyenne.

24 **Réflexion Créative :** un homme se déplace sur un pont $\overline{AB}$. Lorsqu'il a parcouru $\frac{3}{8}$ de la longueur du pont à partir du point A, il a entendu le sifflement d'un train se déplaçant vers le point A, derrière lui, s'approchant du point A à une vitesse uniforme de 60 km/h. Si l'homme se retourne et se dirige vers le train, le train va le heurter au point A. Trouvez la vitesse uniforme minimale de l'homme pour qu'il ne soit pas heurté par le train au point B.



2 - 2 Mouvement rectiligne à accélération uniforme

Allez apprendre

- Accélération
- Courbe vitesse – temps.
- Mouvement uniformément varié
- Relation entre vitesse – temps
- Relation entre distance – temps
- Relation entre vitesse – distance

Vocabulaires de base

- Accélération
- Mouvement uniformément varié
- Accélération uniforme
- Décélération uniforme

Aides pédagogiques

- Papiers quadrillés
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

Préface :

Vous avez déjà étudié le mouvement uniforme rectiligne à vitesse constante. Il est remarquable que très peu de corps se déplacent suivant ces conditions pendant une longue durée. Dans chaque voiture, il y a trois outils permettant de contrôler sa vitesse, l'accélérateur, le frein et le volant qui contrôle la direction du mouvement. On remarque également la variation de la vitesse des corps pendant leur chute et pendant leur lancement vers le haut.



A apprendre

Définition 1

Le mouvement rectiligne varié : C'est le mouvement où la vitesse varie en fonction du temps. Cette variation est appelée l'accélération et elle a pour unité de mesure m/s^2.

$$\text{L'accélération (a)} = \frac{\text{Vitesse Finale - Vitesse initiale}}{\text{Temps}}$$

Ses unités de mesure sont m/s^2 **ou** cm/s^2 **ou** km / h^2

On remarque que : Si la variation de la vitesse à un instant donné est déterminée, cela s'appelle l'accélération instantanée.

Courbe (vitesse – temps)

La notion de l'accélération est liée au changement de la vitesse. Si la vitesse augmente en fonction du temps, on dit que le mouvement est accéléré et dans ce cas l'accélération est positive (en considérant que la vitesse positive) comme le montre la figure (1).

Si la vitesse diminue en fonction du temps, on dit que le mouvement est retardé. Dans ce cas, l'accélération est négative comme le montre la figure (2).

Si la vitesse est constante en fonction du temps, on dit que le mouvement est uniforme.

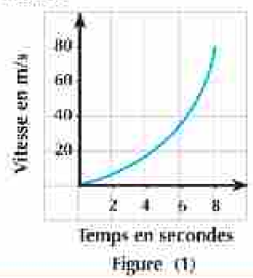


Figure (1)

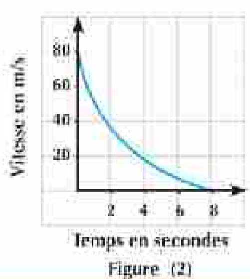


Figure (2)

Mouvement uniformément varié

On dit que le mouvement d'une particule est un mouvement uniformément varié ou il est muni d'une accélération uniforme si le vecteur accélération est constant en norme et en sens en tout temps.

Expression orale : Que signifie chacune des expressions suivantes ?

a La vitesse d'une particule augmente régulièrement pendant son mouvement au taux de 4 m/s^2.

b La vitesse d'une particule diminue régulièrement pendant son mouvement au taux de 24 km/h^2.

Exemple

1 La vitesse d'une voiture roulant en ligne droite varie de 50 km/h à 68 km/h en 10 secondes. Un camion commence à se mouvoir, à partir du repos pour atteindre la vitesse de 18 km/h durant cette même période. Lequel des deux véhicules se déplace avec une plus grande accélération ? Expliquer votre réponse.

Solution

D'après les informations données, on trouve que la voiture et le camion ont atteint la même augmentation de vitesse de 18 km/h (c'est-à-dire 5 m/s) durant un intervalle de 10 secondes

Donc l'accélération des deux véhicules est :

$$\because \; a = \frac{\text{Variation de la vitesse}}{\text{Intervalle du temps}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \; m/s^2$$

Essayez de résoudre

1 La vitesse d'une voiture (A) roulant en ligne droite varie de 24 km/h à 36km/h en 5 secondes. La vitesse d'une voiture (B) roulant en ligne droite varie de 12 km/h à 30km/h durant cette même période. Laquelle des deux voitures se déplace avec une plus grande accélération ? Expliquez votre réponse.

Équations du mouvement uniformément varié

Il y a principalement trois équations qui relient la distance, la vitesse, l'accélération et le temps au cas où le mouvement est muni d'une accélération uniforme. Ces équations sont :

[I] Relation entre la vitesse et le temps :

Si une particule se déplace en ligne droite suivant le vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$, et le vecteur accélération constante $\vec{a}$ et si son vecteur vitesse devient $\vec{v}$ après un intervalle de temps (t) , alors :

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v_0}}{t} \quad \textbf{d'où} \quad \boxed{\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\, t}$$

Donc $v\,\vec{e} = v_0\,\vec{e} + at\,\vec{e}$ où $\vec{e}$ est le vecteur unitaire dans les sens du mouvement.

En calculant la mesure algébrique, on obtient : $\boxed{v = v_0 + a\,t}$

On remarque que :

- La relation relie quatre inconnues. On peut trouver la valeur d'une inconnue en connaissant les trois autres.
- Si un corps commence à se mouvoir à partir du repos, alors, $v_0 = 0$ et $V = at$
- Si $a = 0$, alors $v = v_0$ et donc la particule se déplace à une vitesse uniforme.

Exemple

2 Une particule commence à se mouvoir dans un sens fixe à une vitesse de 9 cm/s et une accélération uniforme de 3 cm/s^2 agissant dans le même sens que celui de la vitesse initiale. Trouvez :

a la vitesse de la particule 5 secondes après le début du mouvement.

b le temps pris à partir du début du mouvement jusqu'à ce que la particule atteigne une vitesse de 54 cm/s.

Solution

a On suppose que le sens du mouvement de la particule soit le sens positif.
D'après les données du problème : $v_0 = 9$cm/s , $a = 3$cm/s^2 , $t = 5$ secondes.
$\because\ v = v_0 + a\,t \qquad \therefore v = 9 + 3 \times 5 \qquad \therefore\ v = 24$ cm/s.

b $\because\ v = v_0 + a\,t \qquad \therefore\ 54 = 9 + 3\,t \qquad \therefore\ t = 15$ secondes.

Essayez de résoudre

2 Une particule commence à se mouvoir dans un sens fixe à une vitesse de 20 cm/s et une accélération uniforme de 5 cm/s^2 agissant dans le même sens que celui de la vitesse initiale. Trouvez :

a la vitesse de la particule une minute après le début du mouvement.

b le temps pris à partir du début du mouvement jusqu'à ce que la particule atteigne une vitesse de 18 km/h.

Exemple

3 Une particule se déplace en une ligne droite. Sa vitesse change de 54 km/h à 3m/s en la moitié d'une minute. Trouvez l'intensité de l'accélération du mouvement. Cette particule peut-elle arriver à l'état du repos à un instant donné ? Expliquez votre réponse.

Solution

$54\ \text{km}/\text{h} = 54 \times \frac{5}{18} = 15\ \text{m}/\text{s}$

D'après les données du problème $v_0 = 15$ m / s , $v = 3$m / s et $t = 30$ secondes .

$\because\ v = v_0 + a\,t \qquad \therefore 3 = 15 + 30\,a$

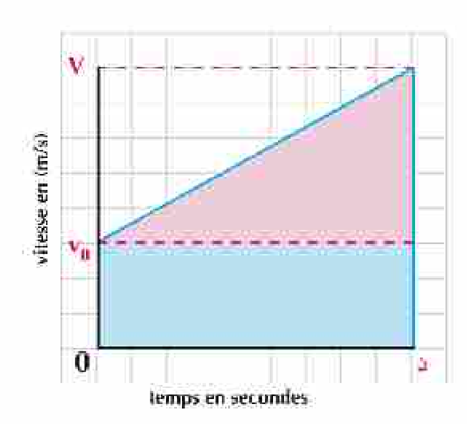
Donc $30\,a = -12 \qquad \therefore a = -0.4$ m/s^2

$\because a < 0$ cette particule peut arriver à l'état du repos à un instant donné car son mouvement est retardé.

Essayez de résoudre

(3) Une voiture roule en ligne droite. Sa vitesse diminue de 63 km/h à 36 km/h en une durée de demi-minute. Calculez son accélération et le temps pris pour que la voiture arrive à l'état de repos.

[II] Relation entre la distance et le temps



L'aire sous la courbe (vitesse-temps) est égal au déplacement du corps.

Dans la figure ci-contre: un corps commence à se mouvoir à une vitesse initiale v_0 avec une accélération uniforme. Après un temps t secondes sa vitesse finale est v. L'aire sous la courbe peut être calculée en la subdivisant en un rectangle et un triangle.

Aire (A) = aire du rectangle + aire du triangle

$$= v_0 t + \frac{1}{2} t (v - v_0)$$

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} t (v_0 + a t - v_0)$$ (En substituant de la première formule : $v = v_0 + a t$)

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Où: d, v et a sont les mesures algébrique des déplacement, vitesse et accélération .

Expression orale :

1- Ecrivez la formule (distance-temps) lorsque le corps commence à se mouvoir à partir du repos.

2- Ecrivez la formule précédente si a = 0 . Comment expliquez vous la nature du mouvement dans ce cas ?

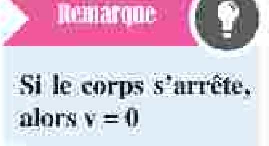
Exemple

(4) Une voiture roule à une vitesse de 90 km/h. Le chauffeur freine et la vitesse de la voiture diminue à un taux constant Elle s'arrête au bout de cinq secondes. Calculez:



a l'accélération de la voiture durant la diminution de la vitesse.

b la distance parcourue par la voiture jusqu'à ce qu'elle s'arrête complètement.



Si le corps s'arrête, alors v = 0

Solution

a Pour transformer la vitesse de km/h en m/s : $90 km/h = 90 \times \frac{5}{18} = 25$ m/s

En appliquant la formule : $v = v_0 + a t$ où $v_0 = 25$ m/s , $v = 0$, $t = 5$ seconds

$\therefore 0 = 25 + 5 a$ **d'où** $a = - 5$ m/s^2

Donc la voiture se déplace à une décélération uniforme d'intensité 5 m/s^2.

b $\because d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ by substitution : $v_0 = 25 m/s$, $t = 5s$, $a = -5 m/s^2$
$\therefore d = 25 \times 5 + \frac{1}{2}(-5) \times 25 = 62.5$ meters.

Essayez de résoudre

(4) Une petite boule est lancée, en ligne droite, à une vitesse de 20 m/s. sur un plan horizontal avec une décélération régulière de $\frac{1}{2}$ m/s^2. Déterminez la position et la vitesse de la boule 2 seconds après du point de départ.

[III] Relation entre la vitesse et le déplacement

On sait que : $v = v_0 - a t$ (1) $d = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$ (2)

En élevant la première équation au carré : $v^2 = v_0^2 + 2 v_0 a t - a^2 t^2$ et en prenant un facteur commun

$\therefore v^2 = v_0^2 + 2a(v_0 t - \frac{1}{2} a t^2)$ par substitution de la valeur de D de l'équation (2)

$$v^2 = v_0^2 + 2 a d$$

Exemple

(5) Une balle est tirée à une vitesse de 20 m/s dans une direction perpendiculaire à un mur vertical d'épaisseur 14 cm. Elle est sortie de l'autre côté du mur à une vitesse de 15 m/s. Trouvez l'intensité de la décélération. Si la balle est tirée sur un mur semblable au premier et à la même vitesse. Trouvez la distance parcourue avant que la balle s'arrête sachant que l'accélération de la balle est la même dans les deux cas.

Solution

On suppose que le sens positif est celui du mouvement de la balle.

$\vec{a}$; $v_0 = 200$ m/s ; 14 cm ; $v = 150$ m/s

Premier cas : $v_0 = 200 m/s$, $v = 150$ m/s et $d = 0{,}14$ m

$\because v^2 = v_0^2 + 2 a d$ $\therefore (150)^2 = (200)^2 - 2 \times a \times 0{,}14$

En simplifiant : $a = -62500 \ m/s^2$

Deuxième cas :

$\vec{a}$; $v_0 = 20$ m/s ; d ; $v = 0$

$v_0 = 200 m/s$, $v = 0$ $a = -62500 \ m/s^2$

$\because v^2 = v_0^2 + 2 a d$ $\therefore 0 = (200)^2 - 2 \times 62500 \ d$

$\therefore d = 0{,}32$ m

Donc la balle s'enfonce dans le mur d'une distance de 32 cm avant qu'elle s'arrête.

Essayez de résoudre

(5) La vitesse d'une voiture a diminué régulièrement de 45 km/h à 18 km/h après avoir parcouru une distance de 625 mètres. Trouvez la distance qu'elle parcourt jusqu'à ce qu'elle s'arrête.

(6) Une balle est tirée horizontalement à une vitesse de 100 m/s sur une masse en bois. Elle s'est enfoncée d'une distance de 50 cm. Trouvez l'accélération de la balle sachant qu'elle l'accélération est uniforme. Si la balle est tirée sur une masse semblable au première, d'épaisseur 18 cm. Quelle est la vitesse avec laquelle la balle sort de la masse du bois?



Exemple **Vitesse moyenne à la $n^{ième}$ seconde:**

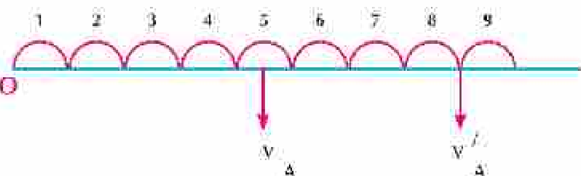
6 Une particule se déplace à une vitesse initiale 10 cm/s dans une direction fixe avec une accélération uniforme 4 cm /s^2 .Calculez :

1) La distance parcourue durant la cinquième seconde.

2) La distance parcourue durant la huitième et la neuvième seconds.



Solution



On considère que le sens positif est celui de la vitesse initiale.

$\therefore v_0 = 10$ cm/s , $a = 4$cm/s^2

1) La vitesse moyenne durant la cinquième seconde = La vitesse au moitié de l'intervalle du temps = La vitesse après $4\frac{1}{2}$ s.

$\because v_A = v_0 + a\,t \qquad \therefore v_A = 10 + 4 \times 4\frac{1}{2} = 28$cm/s.

la distance parcourue à la cinquième seconde = La vitesse moyenne × temps = 28 × 1 = 28 cm.

2) La vitesse moyenne durant les la huitième et la neuvième seconds v_m = La vitesse au moitié de l'intervalle du temps = La vitesse après 8s .

$\because v_A = v_0 + a\,t \qquad \therefore v_A = 10 + 4 \times 8 = 42$ cm/s

La distance parcourue durant la huitième et la neuvième seconds = La vitesse moyenne × temps = 42 × 2 = 84 cm

Reffichissez:

Essayez de résoudre l'exemple précédant par une autre méthode.

Essayez de résoudre

7 Un corps se meut dans un sens constant à une vitesse de 30 cm/s et une accélération uniforme de 6 cm/s^2 dans le sens de sa vitesse. Calculez :

a la distance parcourue après 5 secondes du début du mouvement.

b la distance parcourue à la cinquième seconde uniquement.

8 Une particule s'est déplacée à une vitesse initiale quelconque dans un sens constant et à une accélération uniforme. Si elle parcourt, à la troisième seconde de son mouvement, une distance de 20 mètres, puis elle parcourt dans les cinquième et sixième secondes à la fois, une distance de 60 mètres, Calculez l'accélération du mouvement de la particule et sa vitesse initiale.

9 Le métro se déplace en une ligne droite entre deux stations A et B. La distance entre les deux stations est de 700 mètres. De la station A, il commence son mouvement, du repos avec une accélération uniforme de 2m/s^2 pendant 10 secondes puis il roule, pendant, une période de temps, à une vitesse uniforme. Il parcourt la distance des 60 derniers mètres de son mouvement avec une décélération uniforme jusqu'à son arrêt à la station B. Trouvez le temps que le métro a mis pour parcourir la distance entre les deux stations.

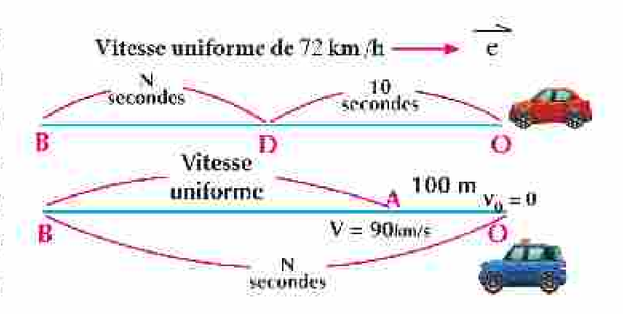


Exemple Application sur le mouvement avec un accélération uniforme

7 Une voiture roule à une vitesse uniforme de 72 km/h. Elle a rencontré une voiture de police qui a commencé à la poursuivre après 10 secondes de son passage avec une accélération uniforme sur une distance de 100 mètres jusqu'à ce que sa vitesse atteigne 90 km/h, puis elle a roulé à cette vitesse jusqu'au moment où elle a rattrapé la première voiture. Trouvez le temps pris par la poursuite à partir de l'instant du mouvement de la voiture de la police et la distance parcourue par cette voiture.

Solution

On considère que la sens positif est le sens de la direction du mouvement et que la voiture de police était au repos au point O, puis elle a parcouru la distance de 100 mètres jusqu'à son arrivée à A où sa vitesse devient 90 km/h avec laquelle elle continue régulièrement jusqu'à ce qu'elle rattrape la première voiture au point B.



$72 \text{ km/h} = 72 \times \frac{5}{18} = 20 \text{ m/s}$, $90\text{km/h} = 90 \times \frac{5}{18} = 25 \text{ m/s}$

Concernant la voiture de police de l'intervalle du temps de O $\longrightarrow$ A

$v_0 = 0$, $v = 25 \text{ m/s}$, $d = 100 \text{ m}$ $\qquad v^2 = v_0^2 + 2ad$

$25 \times 25 = 2 \times a \times 100$ $\quad \therefore\ a = \frac{25}{8} \text{ m/s}^2$

$v = v_0 + at$ $\quad \therefore\ 25 = \frac{25}{8} t$ $\quad \therefore\ t = 8$ secondes

$\therefore$ La distance que la voiture de police parcourt à vitesse uniforme = 25 (t - 8) mètres

La voiture poursuivie a parcouru la distance OB en un temps = (t + 10) secondes

La voiture de police a parcouru la même distance OB en un temps = t secondes

$\therefore\ 20(t + 10) = 100 + 25(t - 8)$, then $t = 60$ secondes

La distance parcourue = 20 × 70 = 1400 mètres

Essayez de résoudre

10 Une voiture roule à une vitesse uniforme de 54 km/h. Elle est passée par une voiture de police qui a commencé à la poursuivre après 30 secondes de son passage avec une accélération uniforme sur une distance de 200 mètres jusqu'à ce que sa vitesse atteigne 72 km/h, puis elle a roulé à cette vitesse jusqu'au moment où elle a rattrapé la première voiture. Trouvez le temps pris par la poursuite à partir de l'instant du mouvement de la voiture de la police et la distance parcourue par cette voiture.



1. **Complétez ce qui suit :**

   a Une particule se meut du repos en ligne droite avec une accélération uniforme de $4 m/s^2$. Sa vitesse 6 secondes après le début du mouvement = ... m/s.

   b La distance que parcourt une particule qui se déplace en une direction fixe du repos à une accélération d'intensité de $5 cm/s^2$ en un intervalle de temps de 4 secondes = ... cm.

   c La vitesse moyenne d'une particule se déplaçant à une vitesse initiale v_0 et une accélération uniforme a pendant la sixième seconde de son mouvement = ...

   d La vitesse moyenne d'une particule se déplaçant à une vitesse initiale v_0 et une accélération uniforme a pendant les septième, huitième et neuvième secondes = ...

   e De l'état de repos, une particule se meut en ligne droite à une accélération uniforme. Si elle parcourt 24 mètres durant les quatre premières secondes de son mouvement, alors l'intensité de son accélération = ...

   f Une particule se meut de l'état de repos en ligne droite avec une accélération uniforme de $2 cm/s^2$ Si elle parcourt une distance de 25 cm, alors sa vitesse à la fin de cette distance = ... cm/s.

2. De l'état du repos, une voiture s'est lancée avec une accélération de $4 m/s^2$. Quelle est la distance parcourue par la voiture lorsque sa vitesse atteint 24 m/s?

3. Une voiture de course roule sur une piste à une vitesse de 44 m/s puis sa vitesse diminue à un taux constant jusqu'à ce qu'elle atteint 22 m/s en 11 secondes. Trouvez la distance parcourue par la voiture durant cet intervalle de temps .

4. Une voiture accélère à un taux constant de 15 m/s à 25 m/s. Quel est le temps pris par la voiture pour atteindre à cette vitesse sachant qu'elle a parcouru une distance de 125 mètres?

5. Un cycliste roule avec une accélération uniforme. Il atteint une vitesse de 7,5 m/s en 4,5 secondes. Si le déplacement du vélo pendant la période d'accélération est égal à 19 mètres, trouvez la vitesse initiale du vélo.

6. Karim s'entraîne à monter à bicyclette. Son père le pousse, alors il a atteint une accélération constante de $\frac{1}{2}$ m / s^2 pendant 6 secondes. Après cela, Karim conduit la bicyclette tout seul à une vitesse de $3 m/s^2$ pendant 6 autres secondes avant de tomber. Trouvez la distance parcourue par Karim.

7. Un cycliste descend une colline avec une accélération constante de $3 m/s^2$. Arrivé en bas de la colline, sa vitesse atteint 18 m/s puis il freine pour conserver cette vitesse pendant une minute. Trouvez la distance totale parcourue par le cycliste.

8. Un chauffeur de voiture roule à une vitesse constante de 24 m/s. Soudain, il voit un enfant traverser la rue. Si le temps nécessaire pour freiner est de $\frac{1}{2}$ seconde et que la voiture roule avec une décélération uniforme de $9,6 m/s^2$ jusqu'à son arrêt, trouvez la distance totale que la voiture a parcourue avant de s'arrêter.

(9) De l'état de repos, un corps a commencé son mouvement en ligne droite horizontale avec une accélération uniforme de 4 cm/s^2 pour une durée de 30 secondes puis il s'est déplacé à la vitesse atteinte pendant 40 autres secondes. Trouvez sa vitesse moyenne.

(10) Un corps se déplace en ligne droite avec une accélération uniforme sur un plan horizontal lisse. Durant la quatrième seconde, après le début du mouvement, il parcourt 26 mètres et 56 mètres durant la neuvième seconde. Trouvez sa vitesse initiale et l'intensité de son accélération.

(11) X et Y sont deux points sur une route rectiligne horizontale. Du repos, une voiture A se déplace de X vers Y avec une accélération uniforme de 10 m/s^2. Au même moment, une autre voiture B se déplace de Y vers X à une vitesse uniforme de 54 km/h. Si la vitesse relative de la voiture A par rapport à la voiture B, au moment de leur rencontre, est égale à 162 km/h, trouvez le temps pris par chacune des deux voitures du début du moment de leur mouvement au moment de leur rencontre.



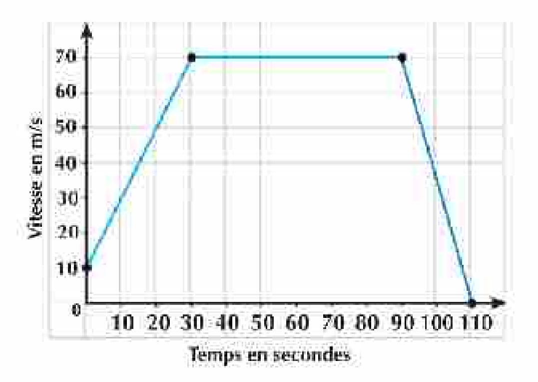
Activité

(12) La figure ci-contre représente la courbe (vitesse-temps) d'un corps commençant le mouvement à une vitesse initiale de 10 m/s jusqu'au repos après un temps égal à 110 secondes. Trouvez :

a Son accélération.

b La décélération uniforme du corps jusqu'à ce qu'il s'arrête.

c La distance totale parcourue par le corps.

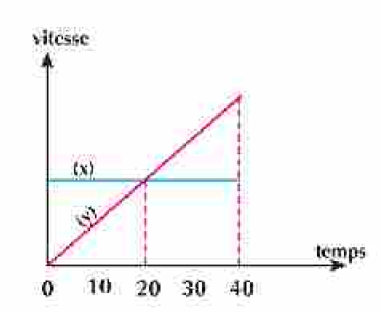


Réflexion créative:

(13) Au fond d'une mine, un ascenseur au repos commence à monter. Il parcourt une distance de 540 cm avec une accélération de 120 cm/s^2 . Ensuite, il monte une distance de 360 cm à une vitesse uniforme, puis une distance de 720 cm avec une décélération uniforme pour s'arrêter à l'entrée de la mine. Calculez le temps pris par l'ascenseur pour remonter du fond de la mine à l'entrée.

Réflexion créative:

(14) La figure ci-contre représente la courbe (vitesse - temps) Du mouvement de deux voitures X et Y. Trouvez le temps où les deux voitures se rencontrent (Expliquez votre réponse)



Chute libre



Introduction:

Que se passe-t-il lorsqu'une orange tombe d'un arbre ?

- L'orange se déplace de l'état de repos. Elle atteint une vitesse au cours de sa chute libre sous l'effet de l'attraction terrestre. Une seconde après la chute, sa vitesse, vers le bas, sera de 9,8 m/s et après une autre seconde, elle sera de 19,6 m/s et ainsi de suite...

Remarquer que : la vitesse de l'orange est directement proportionnel un temps.

L'accélération avec laquelle les corps tombent en chute libre (en négligeant la résistance de l'air) est égale à 9,8 m/s^2 environ et elle varie avec la latitude en diminuant à l'équateur et en augmentant légèrement lorsqu'on se dirige vers les deux pôles.

Lois du mouvement vertical des corps :

Le mouvement vertical suit les mêmes lois que le mouvement horizontal à accélération uniforme avec l'utilisation du symbole (g) qui exprime l'accélération avec laquelle les corps tombent en chute libre au lieu du symbole (a). De cette façon les lois prennent la forme suivante :

$$V = v_0 + g\,t \ , \quad d = v_0 t + \frac{1}{2} g\,t^2 \ , \quad v^2 = v_0^2 + 2gd$$

Où v ; g ; d sont les mesures algébriques des vecteurs vitesse ; accélération ; déplacement.

Pour cela, en appliquant les lois précédentes, il faut prendre en considération v , v_0 , g et d comme suit .

[I] Si le corps tombe ou s'il est lancé vers la surface de la terre

On considère que le sens positif est le sens vertical vers le bas, et par conséquent, v , v_0 , g et d sont positives

Exemple

1. Un maçon a fait tomber un morceau de béton d'un haut échafaudage.
   - **a** Quelle est la vitesse du morceau de béton après la moitié d'une seconde?
   - **b** Quelle est la distance parcourue par le morceau de béton pendant ce temps?

Allez apprendre

- Lois du mouvement vertical.
- Etude du mouvement des corps tombés ou projetés vers le bas.
- Etude du mouvement des corps projetés vers le haut.

Vocabulaires de base

- Chute libre
- Accélération de l'attraction terrestre.

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

Solution

a **Énoncé de la loi :** $v = v_0 + g\,t$

Par substitution : $v_0 = 0$, $g = 9.8\ m/s^2$, $t = \frac{1}{2}$ seconde.

$$v = 0 + 9.8 \times \frac{1}{2} = 4.9\ m/s$$

b Énoncé de la loi : $d = v_0\,t + \frac{1}{2}\,g\,t^2$

Par substitution : $v_0 = 0$, $g = 9.8\ m/s^2$, $t = \frac{1}{2}$ seconde

$$d = 0 + \frac{1}{2} \times 9.8 \times \frac{1}{4} = 1\frac{9}{40}\ \text{mètres}$$

Essayez de résoudre

1 Une pomme est tomée d'un arbre. Une seconde après, elle heurte le sol.

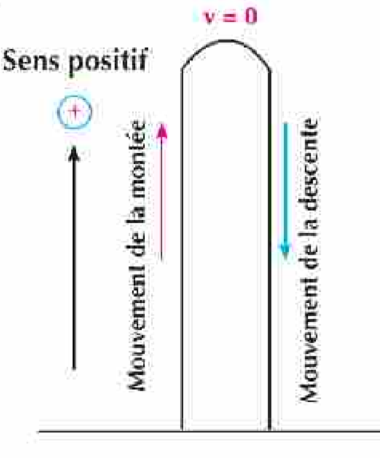
a Calculez la vitesse de la pomme au moment où elle heurte le sol puis sa vitesse moyenne pendant ce temp.

b Quelle est la hauteur de la pomme à partir du sol au moment où elle commence à tomber?

[II] Si le corps est lancé verticalement vers le haut :



Activité



Un balle est lancée vers le haut à une vitesse initiale de 19.6 m/s . En supposant que la direction verticale vers le haut est le sens positif, la vitesse initiale sera positive alors que l'accélération sera négative. **Pourquoi ?**

- Utiliser le logiciel (Geogebra) pour dessiner la relation (vitesse-temps) où : $\mathbf{v = 19.6 - 9.8t}$ où $t \in [0 ; 4]$ **Que remarquez-vous ?**
- Utiliser le même logiciel pour dessiner la relation **(distance-temps)**

où : $d = 19.6\,t - 4.9\,t^2$, **Que remarquez-vous ?**

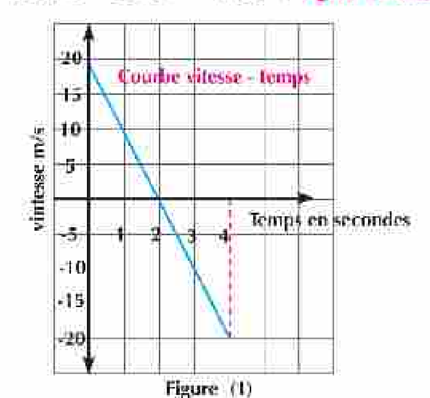


Figure (1)

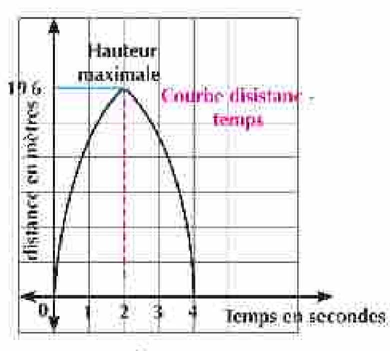


Figure (2)

مطابع دار أخبار اليوم

Du graphique, on remarque que :

- La vitesse du corps est positive pendant la montée et est négative pendant la descente.

  Par exemple : lorsque $t \in [0 ; 2[$ **on remarque que la vitesse** $v > 0$, lorsque $t \in]2 ; 4]$ on a $v < 0$

- La vitesse du corps à la hauteur maximale est égale à zéro.
- Le temps de la montée est égal au temps de la descente.
- L'intensité de la vitesse du corps à laquelle il revient au point du lancement est égale à la vitesse du lancement mais de signe contraire.

Remarque

Temps pour attende la hauteur maximale = $\frac{v_0}{g}$

Hauteur maximale = $\frac{v_0^2}{2g}$

- Le déplacement du corps pendant un intervalle de temps quelconque n'est pas nécessairement égal à la distance que le corps a parcourue pendant cet intervalle.

Pensé critique :

1- Si on lance un corps verticalement vers le haut à une vitesse initiale (v_0) qui atteint sa vitesse finale (v) en un temps (t), trouvez.

a le temps que met le corps pour atteindre une hauteur maximale.

b la hauteur maximale que le corps atteint .

Exemple

2 Un corps est lancé verticalement vers le haut à une vitesse de 49 m/s. Trouvez le temps qu'il met pour arriver à la hauteur maximale et la distance qu'il atteint.

Solution

Soit le sens vesticale vers la haut le sens positife, alors :

$v_0 = 49 m/s$, $g = -9.8 m/s^2$, $v = 0$ (à la hauteur maximale)

a **Pour trouver le temps pris pour atteindre la hauteur maximale :**

$\because v = v_0 + g\,t$ $\quad \therefore 0 = 49 - 9.8\,t$ $\quad \therefore t = 5$seconds.

b **Pour trouver la distance parcourue pour atteindre la hauteur maximale:**

$\because v^2 = v_0^2 + 2\,gd$ $\quad \therefore 0 = (49)^2 - 2 \times 9.8 \times d$ $\quad \therefore d = 122.5$ mètres

Réfléchissez :

1- Pouvez-vous utiliser d'autres lois pour trouver la distance parcourue pour atteindre la hauteur maximale ? Expliquez.

Essayez de résoudre

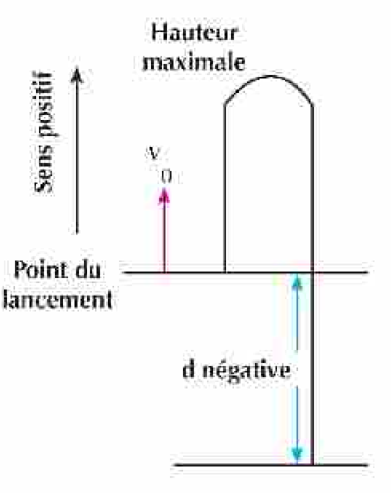
2 Un corps est lancé verticalement vers le haut à une vitesse de 39.2 m/s. Trouvez le temps pour atteindre la hauteur maximale et cette hauteur.

Exemple

3 Un corps est lancé verticalement vers le haut à une vitesse de 16 m/s. Trouvez le temps que met le corps pour arriver 330 mètres verticalement au dessous de point de lancement.

Solution

On considère la direction verticale vers le haut comme sens positif v_0 = 16 m/s parce qu'il le même sens que celui du lancement.



g = - 9.8 **parce qu'elle a un sens contraire à celui de l'attraction terrestre.**

d = - 330 **parce qu'elle est verticalement au dessous du point de lancement.**

$d = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

$-330 = 16t - \frac{1}{2} \times 9.8t^2$ **en simplifiant** $49t^2 - 16t - 330 = 0$

En factorisant le trinôme : $(t - 10)\ (49t + 330) = 0$

$t = 10$, $t = -\frac{330}{49}$ **(réfusé)**

Réfléchissez :

1- Avez-vous d'autres solutions ? Expliquez.

Essayez de résoudre

(3) Une petite balle a été lancée verticalement, vers le haut, de la fenêtre d'une maison. On observe qu'elle descend devant la fenêtre 3 secondes après le moment du lancement. Ensuite elle arrive au sol 4 secondes après le moment lancement. Trouvez la hauteur de cette fenêtre par rapport au sol.



Exercises (2 - 3)

(1) Un enfant fait tomber une balle d'une fenêtre de hauteur 3 ,6 m par rapport au trottoir. Quelle est sa vitesse au moment où elle heurte le trottoir ?

(2) Un ballon est tombé verticalement vers le bas. Quelle est sa vitesse 6 secondes après le début du mouvement ?

(3) Un corps est tombé verticalement vers le bas d'une hauteur de 490 m du sol. Trouvez :

a Le temps d'arriver au sol.

b Sa vitesse après 5 secondes du début du mouvement.

(4) Une balle en caoutchouc est tombée d'une hauteur de 10 mètres, elle heurte le sol et rebondit verticalement vers le haut pour atteindre de $2\frac{1}{2}$ mètre de hauteur. Calculez la vitesse de la balle juste avant et après qu'elle heurte le sol.

(5) Un élève s'entraîne à shooter verticalement vers le haut. Le ballon revient après chaque coup pour heurter son pied. Le ballon prend 0,3 seconde du moment où il a été shooté jusqu'au moment où il heurte le pied.

a Trouvez la vitesse initiale.

b La hauteur atteinte par le ballon après avoir été shooté par l'élève.

6. Un corps est lancé, verticalement, vers le haut, du haut d'une colline de hauteur 9,8 mètres, à une vitesse de 4,9 m/s. Trouvez :

   a. la vitesse du corps au moment où il arrive en bas de la colline.

   b. le temps qu'il met pour arriver en bas de la colline.

7. Une pierre est jetée, verticalement, vers le bas, dans un puits à une vitesse de 4 m/s. Elle arrive au fond du puits après 2 secondes. Trouvez:

   a. la profondeur du puits.

   b. la vitesse de la pierre au moment où elle heurte le fond du puits.

8. D'un point d'une hauteur de 350 m du sol, un corps est lancé, verticalement, vers le haut, à une vitesse de 14 m/s. Trouvez le temps que met le corps pour arriver au sol.

9. D'une fenêtre, un ballon a été lancé verticalement vers le haut. Il arrive devant la fenêtre 4 secondes après le lancement, et au sol 5 secondes après le lancement. Trouvez:

   a. la vitesse du lancement du ballon.

   b. la hauteur maximale atteinte par le ballon à partir du point de lancement.

   c. la hauteur de la fenêtre par rapport au sol.

10. Du sommet d'une tour de hauteur 80,5 mètres, un corps a été lancé verticalement vers le haut à une vitesse de 8,4 m/s. Trouvez:

    a. la hauteur maximale atteinte par le corps à partir du point de lancement.

    b. le temps pris par le corps pendant sa descente jusqu'à ce que se vitesse atteigne 11,2 m/s.

    c. le temps pris pour arriver au point du lancement.

    d. le temps pris pour arriver au sol.

11. Du haut d'une colline de hauteur 140 m, une balle a été lancée, verticalement, vers le haut. On a trouvé qu'elle a parcouru une distance de 10,5 mètres durant la troisième seconde. Trouvez:

    a. la vitesse de lancement de la belle.

    b. la hauteur maximale atteinte par la balle.

    c. le temps pris par la balle pour arriver au sol.

Réflexion créative :

12. Un corps est tombé d'une hauteur de 60 mètres du sol. Au même moment, un autre corps a été lancé du sol, verticalement, vers le haut à une vitesse de 20 m/s. Les deux corps se sont rencontrés après un certain intervalle de temps. Calculez ce temps puis trouvez la distance parcourue par chacun des deux corps pendant cet intervalle de temps.



Loi d'attraction universelle

Allez apprendre

- Loi de gravitation universelle de Newton.
- Définition de la constante univer- selle de gravitation.
- Comparaison des accélérations gravitationnelles sur les surfaces de deux

Vocabulaires de base

- Gravitation universelle
- Constante universelle de gravitation
- Force d'attraction

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique

Réfléchissez et discutez

Qu'arrivera-t-il au mouvement de la lune si la Terre perd sa force d'attraction sur elle ? Certainement, la lune va suivre un autre trajet au lieu du trajet presque circulaire autour de la Terre. Newton s'aperçut que la force qui est responsable de l'attraction de la lune par la Terre, et des planètes par le soleil est un cas particulier de l'attraction universelle entre les corps. Vous allez découvrir la loi de l'attraction universelle de Newton qu'il a publié dans sa recherche mathématique : les principes mathématiques de la philosophie naturelle où il cite : Dans l'univers, tous les corps s'attirent entre eux sous l'effet d'une force directement proportionnelle à leurs masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare leurs centres de gravité. Si (d) est la distance entre deux masses m^1 et m^2 , la force d'attraction entre leurs centres de gravité (F) est donnée par la relation

$$F = G \times \frac{m_1 \, m_2}{d^2}$$

où m_1 et m_2 sont en kilogramme et d en mètre et G la constante universelle de gravitation.

Définition de la constante universelle de gravitation .

C'est la force entre deux masses de 1 kilogramme chacune dont la distante entre leurs centres de gravité est de 1 mètre. Elle est, environ, égale $6{,}67 \times 10^{-11}$ newton . m^2 / kg^2.

Expression orale :

1- Citer les facteurs dont dépends la force d'attraction entre deux .

Réfléchissez :

1- Qu'arrive-t-il à la force d'attraction entre deux corps si la distance entre eux augmente ?

2- Pourquoi les forces d'attraction physique apparaissent-elles clairement entre les astres ?

Exemple

1. Deux balles, dont la masse de la première est de 5,2 kg et la deuxième 0,25 kg, sont placées de sorte que la distance entre leurs centre de gravité est de 50 cm. Calculez la force d'attraction entre elles sachant que la constante universelle de gravitation est égale $6{,}67 \times 10^{-11}$ newton . m^2 / kg^2.

Solution

$m_1 = 5.2$ kg , $m_2 = 0.25$ kg , $d = \frac{1}{2}$ m , $G = 6.67 \times 10^{-11}$ newton.m² / kg²

$F = G \times \frac{m_1 m_2}{d^2}$ $\quad \therefore F = \frac{5.2 \times 0.25}{\frac{1}{4}} \times 6.67 \times 10^{-11}$

$F = 3.4684 \times 10^{-10}$ newton (c'est une très petite force)

Essayez de résoudre

1) Sachant que la masse de la Terre est de 6×10^{24} kg, la masse de la lune est de 7×10^{22} kg, la distance entre les deux est 3×10^{7} mètres et que la constante universelle de gravitation est de $6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m²/kg². Trouvez la force d'attraction exercée par la Terre sur la lune.

Exemple

2) Un satellite de masse m kg gravite à une hauteur de 440 km de la surface de la terre dont la masse est 6×10^{24} kg et le rayon est de 6360 km. Trouvez m à un kilogramme près sachant que la constante universelle de gravitation est de $6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m²/kg² et que la force d'attraction exercée par la Terre sur le satellite est de 17310 Newton.

Solution

$m_1 = m$, $m_2 = 6 \times 10^{24}$, $d = (6360 + 440) \times 1000$ m $\quad$ Par substitution dans la loi : $F = G \times \frac{m_1 m_2}{d^2}$

$17310 = 6.67 \times 10^{-11} \times \frac{m \times 6 \times 10^{24}}{(6800 \times 1000)^2}$

Donc: $m = \frac{17310 \times (6800 \times 1000)^2}{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}$ $\quad m = 2000.035982 \simeq 2000$ kg







Essayez de résoudre

2) Un satellite de masse 1500 kg gravite à une hauteur de 540 km de la surface de la terre dont la masse est 6×10^{24} kg et le rayon est de 6360 km. Sachant que la constante universelle de gravitation est de $6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m²/kg². Trouvez la force d'attraction terrestre sur le satellite en Newton

Exemple Calcul de la masse de la Terre

3) Sachant que le rayon de la Terre est de 6360 km et que $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m²/kg². Calculez la masse de la Terre en kg en supposant qu'un corps de masse 1 kg a été posé sur sa surface.

Solution

La force d'attraction terrestre sur le corps = m g (où m = 1 kg et g = 9,8 m/s²)

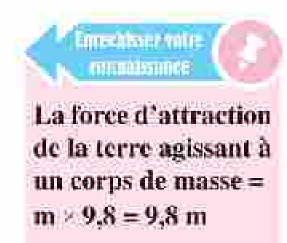
$F = 1 \times 9,8 = 9,8$ Newton.

Le rayon de la Terre = 6360×1000 mètres et $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m²/kg²

En appliquant la loi de la gravitation universelle : $F = G \times \frac{m_1 m_2}{d^2}$

$9,8 = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{1 \times \text{m de la terre}}{(6360 \times 1000)^2}$

La masse de la Terre (m) $= \frac{9,8 \times (6360 \times 1000)^2}{6,67 \times 10^{-11}} \simeq 6 \times 10^{24}$ kg



La force d'attraction de la terre agissant à un corps de masse = m × 9,8 = 9,8 m

Pensé critique : Est-ce que la masse de la Terre change dans l'exemple précédent si la masse du corps posé sur sa surface est égale à 1000 kg ? Expliquer.

Essayez de résoudre

(3) Sachant que la masse de la Terre est égale à 6×10^{24} kg et que la constante universelle de gravitation est de $6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m²/kg². Calculez le rayon de la Terre en supposant qu'un corps de masse 1 kg a été posé sur sa surface



Exemple

Détermination de l'accélération terrestre (g)

(4) Sachant que la masse de la Terre est égale à 6×10^{24} kg et que son rayon est égal à 6360 km. Calculez l'accélération terrestre en m/s² d'un corps de masse 1 kg posé sur la surface de la Terre

Solution

la force d'attraction terrestre sur le corps = mg $\therefore F = 1 \times g$ donc $F = g$

$\because F = G \times \frac{m_1 m_2}{d^2}$ $\therefore g = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{1 \times 6 \times 10^{24}}{(6360 \times 1000)^2}$ $g \simeq 9,89379 \text{ m / sec}^2$

Essayez de résoudre

(4) Dans l'exemple précédant calculez l'accélération terrestre en m/s2 d'un corps de masse 100 kg posé sur la surface de la Terre. Que remarquez-vous ?

Activité

Comparaison des accélérations gravitationnelles sur les surfaces de deux planètes :

Où g_1 et g_2 sont les deux accélérations gravitationnelles sur les surfaces de deux planètes, m_1 et m_2 sont leurs masses en kilogrammes et r_1 et r_2 sont leurs rayons en mètres respectivement

De ce qui précède, on peut déduire la relation suivante : $\frac{g_1}{g_2} = \frac{m_1}{m_2} \times \frac{r_2^2}{r_1^2}$



Exemple

(5) Si la masse de la Terre est 81 fois celle de la lune, leurs diamètres, 12756 km et 3476 km respectivement et l'accélération terrestre est de 9,8 m/s², quelle est l'accélération d'attraction sur la surface de la lune ?

Solution

On suppose que la masse de la lune m kg, alors la masse de la Terre = 81 m kg

$r_1 = 6378$ km , $r_2 = 1738$ km , $g_1 = 9.8$ m / sec^2 , g_2 = ?

$\because \frac{g_1}{g_2} = \frac{m_1}{m_2} \times \frac{r_2^2}{r_1^2}$ $\qquad \therefore \frac{9.8}{r_2} = \frac{80\ m}{m} \times (\frac{1738}{6378})^2$

En simplifiant: $\qquad \therefore$ g de la lune $\simeq 1.63$ m / s^2

Essayez de résoudre

5) Si on sait que la masse de la Terre est 5.97×10^{24} kg et son rayon est 6.34×10^6 m ; la masse de la lune est 7.37×10^{22} kg et son rayon est 1.74×10^6 m . Trouvez le rapport entre l'attraction sur la surface de la lune et la surface de la Terre.



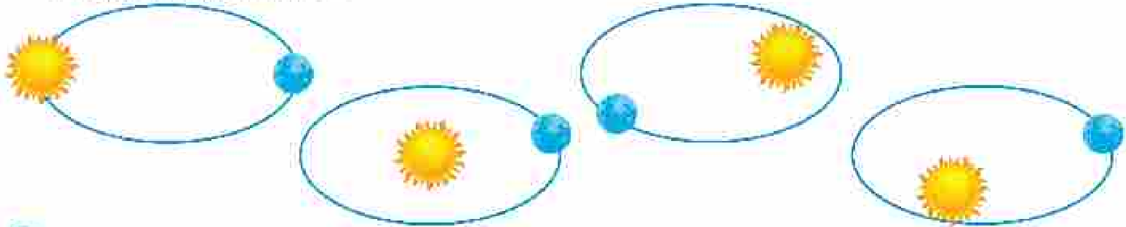
Attention : On considère la constante universelle de gravitation de Newton $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Newton.m^2/kg^2

1) Qu'arrive-t-il à ton poids à mesure que tu t'éloignes de la surface de la Terre ?

2) Pourquoi l'attraction n'apparaît- elle pas entre les corps que nous voyons quotidiennement?

3) Qu'arrive- t-il à la force de la gravitation universelle si on double la distance entre deux masses ?

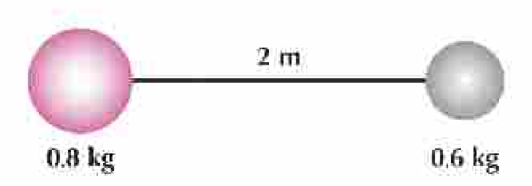
4) La quelle des orbites illustrées dans les figures suivantes représente une orbite possible pour une planète quelconque :



5) **Choix multiples :** Une planète a deux satellites à masses égales. Le premier satellite est dans une orbite circulaire dont le rayon est r, le deuxième est dans une orbite dont le rayon est 2 r. La force d'attraction exercée par la planète sur le deuxième satellite est :

- **a** Quatre fois plus grande que la force agissante sur le premier satellite.
- **b** Deux fois plus grande que la force agissante sur le premier satellite.
- **c** Égale à la force agissante sur le premier satellite.
- **d** La moitié de la force agissante sur le premier satellite.
- **e** Un quart de la force agissante sur le premier satellite.

6) **Dans la figure ci-contre** :
Si la distance entre les centres des deux balles est 2 m, la masse de l'une d'elles 0,8 kg et celle de l'autre 0,6 kg , 2m 0,8 kg 0,6 kg quelle est la force d'attraction entre les deux balles ?



7. Deux balles se ressemblent, leurs masses est 6,8 kg chacune et la distance entre leurs centre est 21,8 cm. Quelle est la force d'attraction entre elles.

8. Calculez la force d'attraction entre deux corps dont les masses sont 10 et 15 kg et la distance qui les sépare est 2 mètres.

9. Un satellite de masse 2000 kg gravite à une hauteur de 330 km de la surface de la Terre dont la masse est 6×10^{24} kg. Trouvez la force d'attraction de la Terre agissant sur le satellite sachant que le rayon de la Terre est 6360 km.

10. Si l'accélération terrestre (g) est 10 m/s^2 et le rayon est égal à $6,36 \times 10^6$ m, calculez la masse de la Terre.

11. Calculez la force d'attraction entre la soleil et la Terre sachant que la Terre tourne dans une orbite presque circulaire autour du soleil, que sa masse est égale à 6×10^{24} kg , que la masse du soleil est égale à 9×10^{29} kg et que la distance qui les sépare est $1,5 \times 10^{11}$ m.

12. Sachant que la masse e la Terre est égale à $5,97 \times 10^{24}$ kg , son rayon est égal à $6,36 \times 10^6$ m et que la masse de la lune est égale à $7,37 \times 10^{22}$ kg , Trouvez le rayon de la lune si l'attraction terrestre est six fois celle sur la surface de la lune.

13. Sachant que la masse de la terre est $6,06 \times 10^{24}$ kg et son rayon $6,36 \times 10^6$ m, Trouvez la force de la gravitation terrestre.

14. Une planète a une masse égale trois fois la masse de la Terre et son diamètre est trois fois celui de la Terre. Calculez le rapport entre l'accélération d'attraction sur cette planète et sur la surface de la Terre.

15. Trouvez la force de gravitation universelle entre deux planètes, la masse de la première est 2×10^{21} tonnes, la masse de la deuxième est 4×10^{25} tonnes et la distance entre les deux est 2×10^6 km.

16. On a placé une sphère en fer à une distance de 50 cm d'une autre sphère en nickel dont la masse est 25 kg. La force d'attraction entre les deux est de 6×10^{-8} . Trouvez la masse de la sphère en fer.

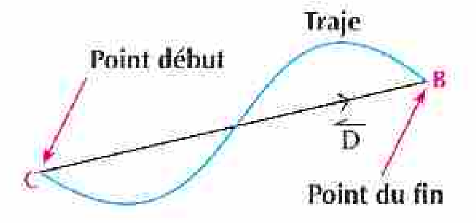
17. Un corps de masse m' kg à une hauteur de h mètres de la surface de la Terre de rayon R et de masse est m kg. Trouvez la force d'attraction de la Terre agissant sur le corps.

18. Le pois d'un satellite sur la terre est 421997,6 Newton, trouve son pois quand il se trouve dans une orbite extérieure à une hauteur de 350 km de la surface de la Terre dont le rayon est égal à $6,37 \times 103$ km et de masse $5,6 \times 10^{24}$ kg. (La force en Newton = la masse en kg × l'accélération terrestre (g) est 9,8 m/s^2)

Résumé de l'unité

Vecteur déplacement

C'est le vecteur représenté par le segment orienté $\overrightarrow{AB}$ dont le point de départ est (A) et le point d'arrivée est (B) Le vecteur déplacement $\overrightarrow{AB}$ est noté par le symbole $\overrightarrow{D}$, la norme de ce vecteur est notée $\| \overrightarrow{AB} \|$



Vecteur position

C'est le vecteur dont le point d'origine est la position de l'observateur (O) et le point d'extrémité est la position du corps observé. Il est noté par le symbole $\overrightarrow{r}$

Relation entre le vecteur position et le vecteur déplacement :

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}$$

Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse d'une particule est le vecteur dont l'intensité est égale à la valeur de la vitesse et dont la direction est celle de la direction de la vitesse.

Mouvement uniforme

C'est le cas où la norme et le sens du vecteur vitesse sont constants. C'est-à-dire que le corps se déplace dans une direction fixe où il parcourt des distances égales en des intervalles de temps égaux. Dans ce cas, la relation entre les mesures algébriques des deux vecteurs $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le mouvement uniforme est $d = v\,t$.

Vecteur vitesse moyenne

Si une particule se déplace et se trouve à deux instants du temps t_1 et t_2 dans les positions A et B respectivement , et si $\overrightarrow{D}$ est le vecteur de déplacement durant l'intervalle de temps $(t_2 - t_1)$, alors est appelé le vecteur vitesse moyenne de cette particule durant cet intervalle de temps.

On a :

$$\overrightarrow{v_A} = \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{d}}{t_2 - t_1}$$

Vitesse instantanée :

Si une particule se déplace à une vitesse variable à travers la courbe distance-temps, alors la pente de la tangente à la courbe, en un point quelconque, à un instant donné, est appelée vitesse instantanée.

Vitesse relative :

La vitesse relative d'une particule (A) par rapport à une autre particule (B) est la vitesse à laquelle, il semble à la particule (B) que la particule (A) se déplace si on considère que la particule (B) est à l'état du repos. Si on considère que v_a et v_b sont les vecteurs vitesse des deux particules (A) et (B) et que la vitesse relative de (B) par rapport à (A) est $v_{B/A}$, alors

$$\overrightarrow{v_{BA}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A}$$

Mouvement rectiligne à accélération uniforme :

C'est le mouvement où la vitesse varie en fonction du temps. Cette variation est appelée l'accélération et elle a pour unité de mesure m / s^2.

$$\text{Accélération (a)} = \frac{\text{Vitesse finale - Vitesse initale}}{\text{Temps}}$$

Mouvement uniformément varié :

On dit que le mouvement d'une particule est un mouvement uniformément varié ou il est muni d'accélération uniforme si le vecteur accélération est constant en norme et sens en tout temps. Une particule se déplace en ligne droite à une vitesse initiale (v_0) et à une accélération constante(a). Si sa vitesse devient (v) après un intervalle du temps (t) et si la distance parcourue durant cet intervalle est (d), alors :

- Le relation entre la vitesse et le temps: $v = v_0 + a\,t$
- Le relation entre la distance et le temps: $d = v_0\,t - \frac{1}{2}\,a\,t^2$
- Relation entre la vitesse et la distance : $v^2 = v_0{}^2 - 2\,ad$

On remarque que ces relations relient quatre inconnues et qu'on peut Trouvez l'une d'elles en connaissant les trois autres.

- L'aire sous la courbe vitesse-temps est égale au déplacement du corps qui se déplace.
- La vitesse moyenne d'une particule durant un intervalle de temps donné est égale à sa vitesse instantanée au centre de cet intervalle.

Loi du mouvement vertical des corps:

Le mouvement vertical suit les mêmes lois que le mouvement horizontal à accélération uniforme ave l'utilisation du symbole (g) qui exprime l'accélération avec laquelle les corps tombent en chute libre au lieu du symbole (a). De cette façon, les lois prennent la forme suivante :

$$v = v_0 - g\,t \,,\quad d = v_0\,t + \frac{1}{2}g\,t^2 \,,\quad v^2 = v^2 - 2gd$$

Si on lance un corps verticalement vers le haut sous l'effet de l'attraction terrestre et qu'il revienne au point du lancement alors :

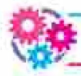
- La vitesse du corps durant la montée est positive et durant la descente est négative.
- La vitesse du corps à l'instant où il atteint la hauteur maximale est égale à zéro.
- Le temps de la montée est égal au temps de la descente.
- L'intensité de la vitesse à l'instant où il revient au point de lancement est égale à l'intensité de la vitesse de lancement mais de signe contraires.
- Le déplacement d'un corps durant un de lais du temps donnée n'est pas forcement égal à la distance parcourue par le corps durant ce delais.

Loi de gravitation universelle

Si la distance (d) entre deux masses m_1 et m_2 , la force d'attraction entre elles (F) est donnée par la relation $F = G \times \frac{m_1\, m_2}{d^2}$ où m_1 et m_2 sont en kilogramme et d en mètres.

Constant universelle de gravitation:

C'est la force d'attraction agissant entre deux masses d'intensités 1 kilogrammes chacune et de distance, entre leurs centres, égale à un mètre. Elle est égale à environ $6{,}67 \times 10^{-11}$ Newton.m^2/kg^2



Exercices généraux



Complétez ce qui suit :

1) Si $\vec{v}_A = 7\ \vec{i}$, $\vec{v}_B = -3\ \vec{x}$ alors $\vec{v}_{AB}$ = ...

2) Si $\vec{v}_{CD} = 70\ \vec{e}$, $\vec{v}_c = 50\ \vec{e}$ alors $\vec{v}_D$ = ...

3) Si deux voitures A e t B se déplacent aux vitesses 65 km/h et 75 km/h , alors
   - a) v_{AB} = ... si les deux voitures roulent dans le même sens.
   - b) v_{AB} = ... si les deux voitures roulent dans deux sens contraires.

4) Une voiture se déplace à partir du repos avec une accélération uniforme de 20 cm/s² durant 10 secondes.
   - a) La vitesse finale de la voiture = ... m/s.
   - b) La distance parcourue durant cet intervalle de temps = ... m.

5) Un corps se meut à une vitesse de 72 km/h avec une accélération de 2 m/s².
   - a) Le temps que prend le corps jusqu'à ce qu'il s'arrête = ... sec.
   - b) La distance parcourue durant cet intervalle de temps = ... m.

6) Une voiture a freiné pour s'arrêter en 10 secondes après avoir parcouru 25 mètres.
   - a) L'accélération pendant l'utilisation du frein = ... m/s².
   - b) La vitesse de la voiture au début de l'utilisation de frein = ... m/s.

7) Un corps est tombé verticalement du sommet d'une tour. Il est arrivé au sol après 5 secondes:
   - a) La vitesse du corps au moment de son arrivée sur le sol = ... m/s.
   - b) La hauteur de la tour = ... mètres.

8) D'un point du sol, un corps est projeté, verticalement, vers le haut, revient au même point après 4secondes:
   - a) La vitesse du lancement du corps = ... m/s.
   - b) La hauteur maximale atteinte par le corps = ... mètres.

9) Du sommet d'une tour de 20 mètres, on a lancé un corps vers le haut à une vitesse de 7 m/s:
   - a) La vitesse de l'arrivée au sol = ... m/s.
   - b) Le temps de l'arrivée au sol = ... secondes.

10) Si une planète a une masse égale à trois fois la masse de la Terre et son diamètre est égal à trois fois celui de la Terre, alors la rapport entre l'accélération gravitationnelle de la planète l'accélérations terrestre est égal à .... : ....

11) Un corps se déplace, en ligne droite, une distance de 100 m à une vitesse de 5 m/s puis à une vitesse de 8 m/s dans le même sen pendant 10 secondes. Trouvez la vitesse moyenne durant le déplacement total.

(12) Deux corps A et B se déplacent en ligne droite dans le sens $\overrightarrow{BA}$ aux vitesses 1000 m/mn et 120 km/h. Si la distance entre les deux corps est 30 km, trouvez quand et où ils se rencontrent.

(13) Une voiture (A) se déplace sur une route droite, en mesurant la vitesse relative d'une voiture (B) venant en sens contraire, elle a trouvé 130 km/h. Quand la voiture (A) a doublé sa vitesse et a refait la mesure, elle a trouvé que la vitesse de la voiture (B) est 180 km/h. Trouvez la vitesse réelle de chacune des deux voitures.

(14) Sur l'autoroute, une voiture radar roulant à 30 km/h, surveille un camion venant dans le sens contraire. Il lui a semblé qu'il roule à 110 km/h. Trouvez la vitesse réelle du camion.

(15) Un corps se meut en ligne droite à une vitesse de 7m/s et une accélération uniforme de 4 m/s^2. Trouvez sa vitesse et la distance qu'il parcourt en 6 secondes

(16) Du repos, un corps a commencé son mouvement en ligne droite avec une accélération uniforme de 20 km/s2. Lorsque sa vitesse a atteint 8 m/s, il s'est déplacé avec une décélération uniforme jusqu'au repos après 112 secondes du début du mouvement. Calculez la décélération et la distance totale.

(17) Du repos, un corps s'est déplacé et a parcouru 150 m. Lorsque sa vitesse a atteint 54 km/h, l'accélération s'arrête et il continue avec la vitesse atteinte une distance de 300 mètres puis il se déplace avec une décélération uniforme de $\frac{3}{2}$ m/s^2 jusqu'au repos. Calculez la vitesse moyenne durant tout le trajet.

(18) Un corps se déplaçant en ligne droite avec une accélération uniforme a parcouru 52 mètres les quatre premières minutes puis une distance de 92 mètres les quatre minutes suivantes. Calculez l'accélération, la vitesse initiale et la distance parcourue pendant les 10 premières minutes du mouvement.

(19) Si $\overrightarrow{r}$ est le vecteur position d'une particule se déplaçant suivant une ligne droite à partir d'un point O selon la relation $\overrightarrow{r} = (3t^2 - 3)\ \overrightarrow{r}$, trouvez le vecteur déplacement 4 secondes après le début du mouvement.

(20) En tombant d'une hauteur h sur le sol, un corps a parcouru dans la dernière seconde de son mouvement 34,3 mètres. Trouvez:

a La vitesse de l'arrivée du corps sur le sol.

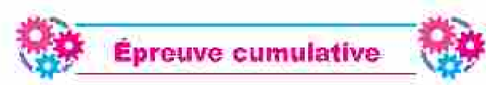
b La hauteur de laquelle il est tombé.

(21) Un corps est lancé, verticalement vers le haut, à une vitesse de 14 m/s, d'une hauteur de 359 mètres du sol. Trouvez:

a Le temps pris par le corps pour arriver au sol.

b La distance totale parcourue par le corps jusqu'à son arrivée au sol.

(22) On a posé une sphère en fer à 40 cm d'une autre sphère en nickel, dont la masse est 50 kg.La force d'attraction entre elles est 12×10^{-8} Newton. Quelle est la masse de la sphère en fer sachant que la constante universelle de gravitation est égale à $6,67 \times 10^{-11}$ Newton.m^2/kg^2



1. Deux forces d'intensités 8 et 16 Newton agissent en un point matériel. Trouvez:
   - **a** L'intensité de la plus grande résultante entre elles.
   - **b** L'intensité de la plus petite résultante entre elles.
   - **c** L'intensité et la direction de leur résultante lorsque l'angle des lignes d'action des deux forces mesure 120°.

2. Les forces d'intensités 12 , $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ et 8 g.p agissent en un point matériel dans les directions Est , Nord-ouest, Sud-ouest et Sud respectivement. Trouvez l'intensité et la direction des résultantes de ces forces.

3. Un corps de poids (p) Newton est attaché par deux fils faisant deux angles de mesure θ° et 30° avec la verticale. Le corps est en équilibre quand la tension dans le 1ère fil est 12 N et dans le 2ème fil est $12\sqrt{3}$ N. Trouvez θ et p.

4. Un corps de poids 90 kg.p est posé sur un plan incliné sur l'horizontale d'un angle de 30° Le corps est en équilibre à l'ide d'une force qui fait avec le plan un angle de 30°vers le haut. Trouvez l'intensité de la force et la réaction normale.

5. Une barre homogène $\overline{AB}$ de poids 4 kg.p est attachée par son extrémité (A) à une charnière fixée sur un mur vertical. Une force horizontale agit sur son extrémité (B) pour le garder en équilibre. Si l'angle d'inclinaison de la barre avec le mur mesure 45°. Trouvez l'intensité de la force et la réaction de la charnière

6. AUne voiture de police (A) se déplaçant sur une route droite à une vitesse de 25 km/h a vu une autre voiture (B) roulant sur la même route à une vitesse de 75 km/h. Trouvez la vitesse de la voiture (B) par rapport à la voiture (A) lorsque:
   - **a** les deux voitures roulent dans le même sens.
   - **b** la voiture (B) roule dans le sens contraire de la voiture (A).

7. Un corps de meut en ligne droite avec une accélération uniforme d'intensité 5 km/s^2 dans le même sens que sa vitesse initiale dont l'intensité est de 40 cm/s. Trouvez :
   - **a** L'intensité de la vitesse du corps et de son déplacement 24 secondes après le début du mouvement.
   - **b** L'intensité de la vitesse du corps après avoir parcouru une distance de 56 mètres du départ.

8. Une voiture se déplace sur une route droite avec une décélération uniforme de 14 cm/s^2. Elle s'est arrêtée après 20 secondes du moment de départ. Trouvez :
   - **a** sa vitesse initiale.
   - **b** la distance qu'elle a parcourue en la moitié d'une minute.
   - **c** la distance qu'elle a parcouru jusqu'au repos.

9 10Un corps est tombé, verticalement, vers le bas, d'une hauteur quelconque, vers un sol mou et il s'est enfoncé d'une distance de 13 cm avant le repos. Si le corps se déplace dans la terre avec une décélération uniforme de 63 m/s^2 , de quelle hauteur le corps est-il tombé ?

10 Un corps est lancé du sommet d'une tour verticalement vers le haut à une vitesse de 24,5 m/s. Il arrive au sol après 8 secondes. Trouvez:

a la hauteur de la tour.

b La hauteur maximale atteinte par le corps à partir du sol.

c La distance parcourue par le corps pendant ce temps .

11 La quelle des figures suivantes représente le mouvement par une vitesse uniforme :

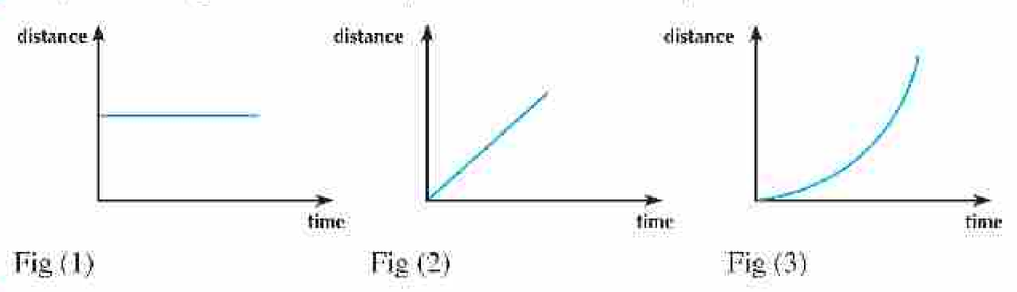


Fig (1) Fig (2) Fig (3)

12 Les gouts de l'huile se coulent d'une voiture en mouvement, comme dans la figure :



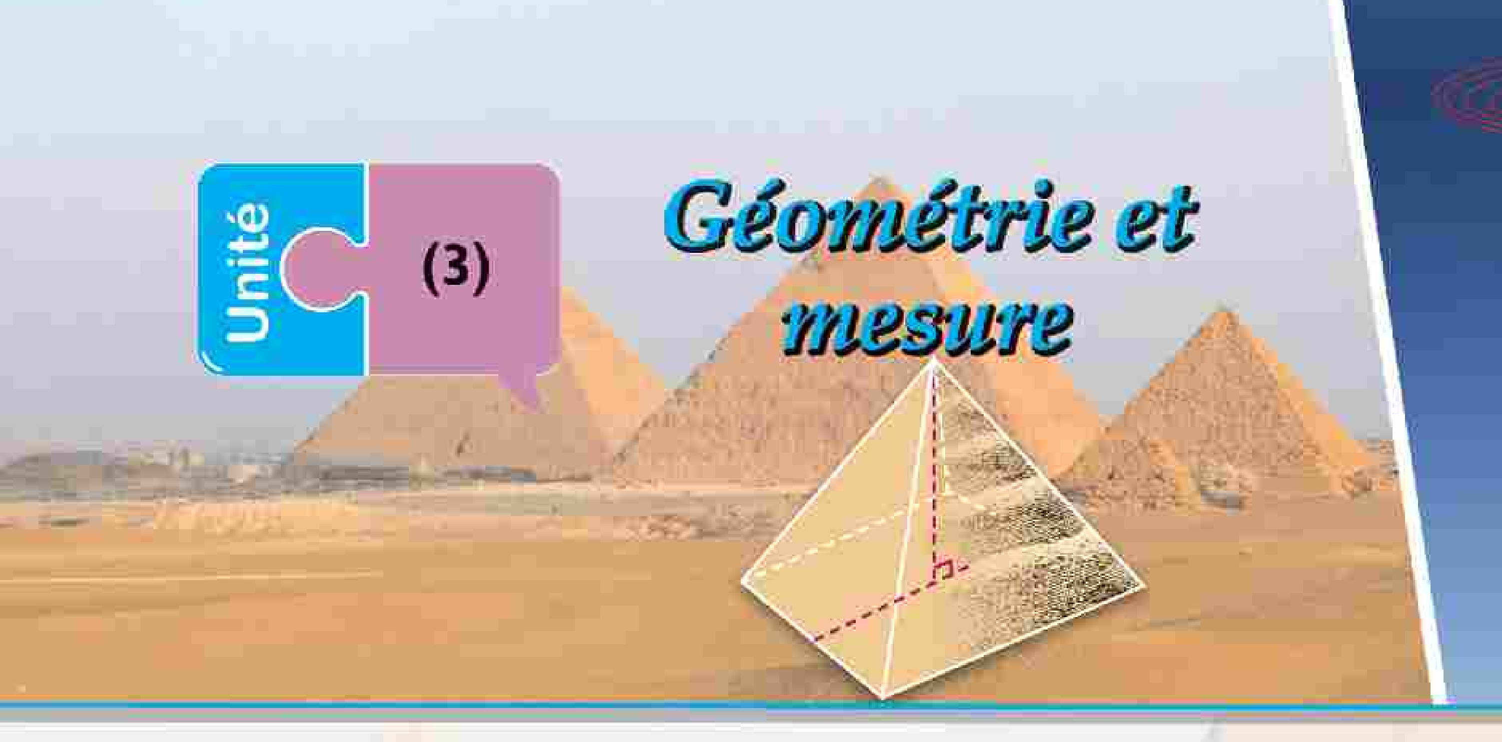
En observant Les gouts de l'huile, alors la voiture se déplace par :

1 - Une vitesse uniforme. 2 - accélération positive.

3 - accélération négative. 4 - accélération négative puis une vitesse uniforme.

Si vous ne pouvez pas répondre à une de ces questions, vous pouvez utiliser le tableau ci - dessous:

Si vous ne pouvez pas répondre à une des ces questions	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Voir	80	16	26	34	37	37	60	66	70	76	77	56	66



Introduction de l'unité

La géométrie a débuté à son origine par le côté pratique. Les Pharaons l'ont utilisée pour déterminer les superficies des terrains, construire les pyramides et les temples. Ils ont trouvé les superficies et les volumes de quelques solides. Lorsque Thalès (640-546 av JC) a visité Alexandrie, il a aimé les méthodes employées par les pharaons pour mesurer la terre et il leur a donné le nom de géométrie qui vient du grec « geo » qui veut dire la terre et « metron » qui veut dire mesure. Il s'est intéressé à l'étude de la géométrie en tant que expression explicite abstraite démontrable.

La géométrie s'est développée avec les Grecs (Thales, Pythagore, Euclide) avec l'apparition d'une série de théorèmes basés sur des axiomes et des définitions liés dans un système logique précis cité par Euclide dans son ouvrage, les Éléments de mathématiques, en treize livres. Alexandrie présentait le minaret de la connaissance jusqu'à l'arrivée des Arabes qui ont conservé ce patrimoine en le traduisant an arabe, lui rajoutant des ajouts importants et l'ont rapporté en Europe au XIIème siècle.

Au XVIème siècle, la renaissance des mathématiques a débuté avec de nouvelles sciences. Descartes (1596 - 1650) a fondé les bases de la géométrie analytique, la présentation les équations par des figures graphiques et géométriques ainsi que l'expression des figures par des équations. Il a déduit l'équation du cercle : x2 + y2 = r2. Euler a trouvé la relation entre le nombre des côtés, des sommets et des arêtes d'un solide à base polygone qui est : Le nombre de faces + Le nombre de sommets = Le nombre d'arêtes + 2

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- savoir définir le point , la droite et le plan dans l'espace.
- Identifier quelques solides (la pyramide, la pyramide régulière, la pyramide droite, le cône, le cône droit) et connaître les propriétés de chacun.
- Déduire l'aire latérale et l'aire totale de la pyramide droite et du cône droit.
- Déduire le volume de la pyramide droite et du cône droit.
- Déterminer l'équation du cercle en fonction des coordonnées de son centre et de la longueur de son rayon.
- Déduire la forme générale de l'équation du cercle.
- Déterminer les coordonnées du centre du cercle et la longueur de son rayon en connaiss ant.de l'équation générale du cercle.
- Appliquer ce qu'il a appris en géométrie et mesure dans la modélisation de situations en rapport avec les mathématiques et la vie quotidienne.



Vocabulaires de base

- le point
- la droite
- le plan
- l'espace
- le sommet
- la base
- l'axe
- le cercle
- le centre
- le rayon
- le diamètre
- la pyramide
- le cône
- la face latérale
- l'arête latérale
- l'hauteur
- l'hauteur latérale
- la pyramide régulière
- la pyramide droite
- patron d'une pyramide
- le cône circulaire droit
- l'aire latérale
- l'aire totale (l'aire de la surface)



- Instruments géométriques
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

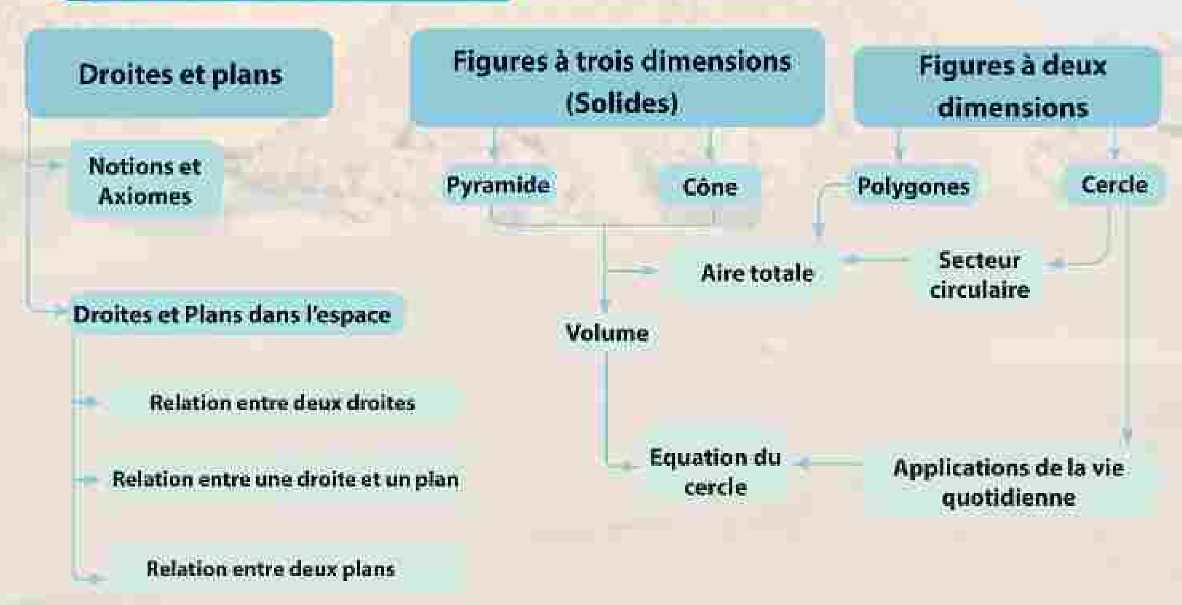


Leçons de l'unité

Leçon (3-1): droite et plan.
Leçon (3-2): Pyramide et Cône.
Leçon (3-3): Aire latérale et aire totale d'une pyramide et d'un cône.
Leçon (3-4): Volume d'une pyramide et d'un cône
Leçon (3-5): Equation du cercle.



Organigramme de l'unité





Droites et plans dans l'espace

Allez apprendre

- Notions et axiomes géo-métriques
- Relation entre deux droites dans l'espace
- Relation entre
- Une droite et un plan
- Dans l'espace
- Différents positions
- Relatives de deux plans

Vocabulaires de base

- Le point
- La droite
- Le plan
- L'espace

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme
- Instruments géométriques

Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà étudié des notions mathématiques du point, de la droite et du plan. Alors pouvez vous répondre aux questions suivantes :

- Par quoi pouvez-vous représenter votre ville sur la carte de l'Egypte ?
- Combien de points faut-il dessiner pour tracer une droite ?
- Pour vous, que représente :
- le sol de la classe, la surface de la table et la surface du mur ?
- la surface d'un ballon, le dôme d'une mosquée et la surface de la bouteille de gaz ?



Activité

Tracez deux points différents, A et B sur une feuille de papier cartonné. Utilisez une règle pour relier les deux points A et B et prolonge la droite. Essayez de tracer une autre droite passant par les deux points.
Pouvez-vous tracer une autre droite ?
Qu'est ce que vous déduisez de cette activité ?



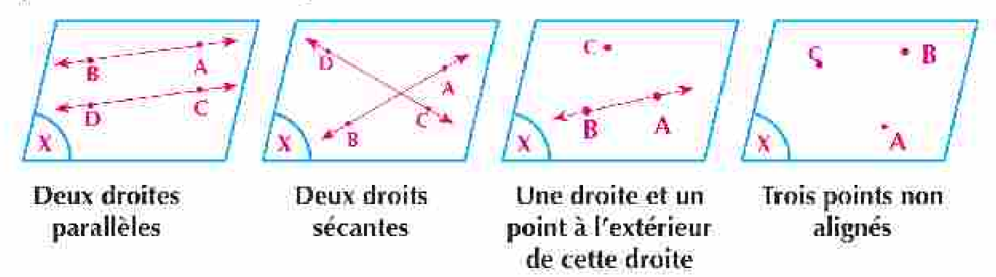
Activité



Tracez trois points non alignés A, B et C, comme indiquar la figure ci-contre Posez un côté d'un papier cartonné à la forme d'un rectangle sur la droite $\overleftrightarrow{AB}$ pliez le papier autour de la droite $\overleftrightarrow{AB}$ jusque à ce que le papier passe par le point C.
Combien de position dans laquelle le point C coïncide au plan du papier pendant un tour complét du papier

Axiomes Géométriques :

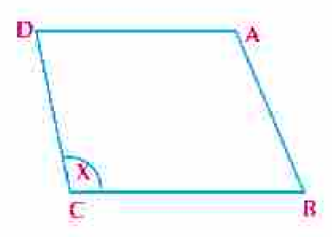
- Une droite est bien déterminée par deux points distincts.
- Un plan est bien déterminée par l'un des cas suivants:



Deux droites parallèles | **Deux droits sécantes** | **Une droite et un point à l'extérieur de cette droite** | **Trois points non alignés**

- Par un point de l'espace passe une infinité des plans.

Le plan : un plan est une surface illimitée dont toute droite passant par deux de ses points est inclus complètement dans cette surface. Dans la figure contre : Un plan est symbolisé par X ; Y ; Z ; .... ou par 3 lettres au moins comme ABC ; .... et il n'est pas limité de touts les sens. On le représente par un triangle, un carré, un rectangle, un parallélogramme, un cercle, ...



L'espace : un espace est un ensemble infini de points et il contient touts les figures, les plans, les solides qu'on étudie.

Example

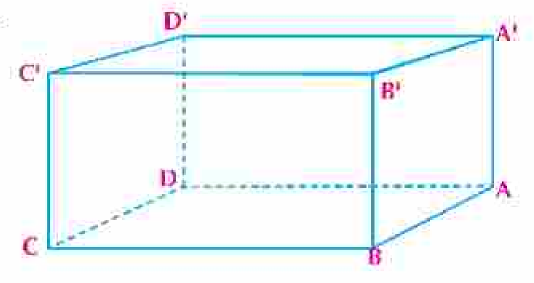
1. Observez la figure ci-contre et réponds aux questions suivantes.

   a. Déterminez trois droites passant par le point A.

   b. Déterminez les droites passant par A et B à la fois.

   c. Déterminez trois plans passants par A.

   d. Déterminez trois plans passant par A et B à la fois.



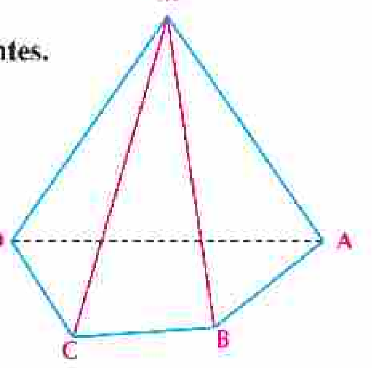
Solution

a. $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{AD}$

b. $\overleftrightarrow{AB}$

c. ABB', ABC, ADD'

d. ABB', ABC, ABC'D'



P Essayez de résoudre

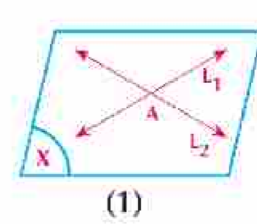
(1) **Observez la figure ci-contre et répondez aux questions suivantes.**

a) Combien de droites dans cette figure ? Déterminez les droites passant par le point A?.

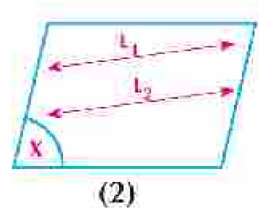
b) Combien de plans dans cette figure? Déterminez trois plans passant par le points A?.

Relation entre deux droites dans l'espace :

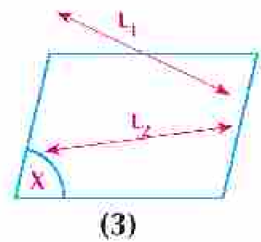
Observez les figures suivantes, puis complétez :



(1)



(2)



(3)

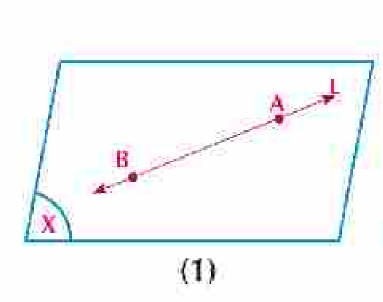
1- Deux droites sécantes : qui sont incluses dans un même .... et elles ont .... en commun.

2- Deux droites parallèles : qui sont incluses dans un même .... et elles n'ont .... en commun.

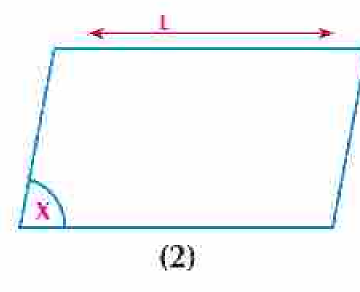
3- Deux droites non-coplanaires : qui ne peuvent pas être incluses ....

Pensé critique : Les deux droites non-coplanaires ne sont ni parallèles ni sécantes. Expliquez.

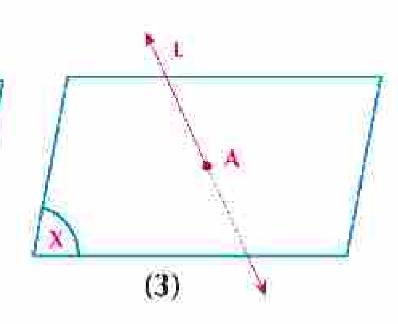
Relation entre une droite et un plan dans l'espace. Observez les figures suivantes, puis complétez :



(1)



(2)

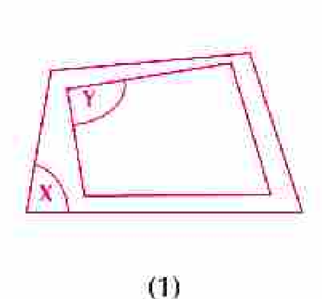


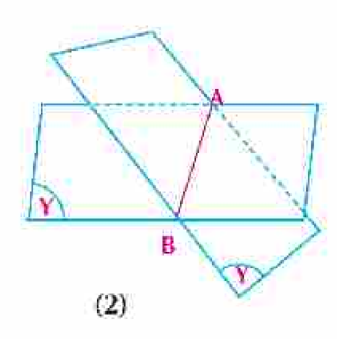
(3)

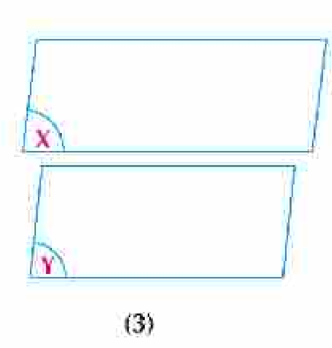
- La droite est parallèle au plan dans la figure ....
- La droite coupe le plan dans la figure ....
- La droite est incluse dans le plan dans la figure ....

Positions relatives de deux plans

Observez les figures suivantes, puis complétez :





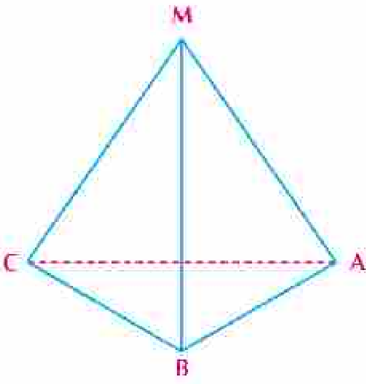


(1) (2) (3)

- Les deux plans sont parallèles dans la figure ....
- Les deux plans sont confondus dans la figure ....
- Les deux plans sont sécants dans la figure ....



Exemple



2 Observez les figures suivantes, puis complétez:

a) Le plan MAB ∩ le plan MBC = ...

b) Le plan MBC ∩ le plan ABC = ...

c) $\overleftrightarrow{MB}$ ∩ le plan ABC = ...

d) $\overleftrightarrow{MC} \cap \overleftrightarrow{AB}$ = ...

e) Le plan MAB ∩ le plan MBC ∩ le plan MAC = ...

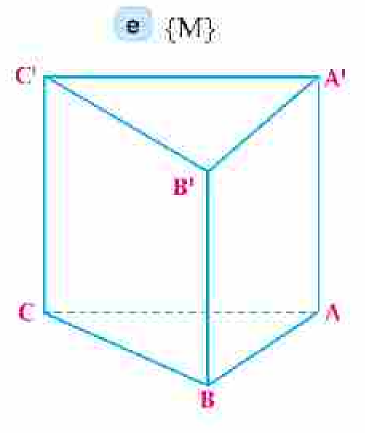
Solution

a) $\overleftrightarrow{MB}$ b) $\overleftrightarrow{BC}$ c) $\{B\}$

d) ϕ (car elles sont deux droites non-coplanaires) e) $\{M\}$

Essayer de résoudre :

2) Observez la figure suivante, puis complétez :



a) Le plan ABB'A' ∩ le plan BCC'B' = ...

b) Le plan ABC ∩ le plan A'B'C' = ...

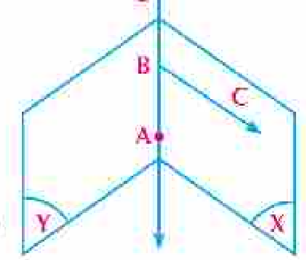
c) $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ = ...

d) $\overleftrightarrow{BB'}$ ∩ le plan ABC = ...

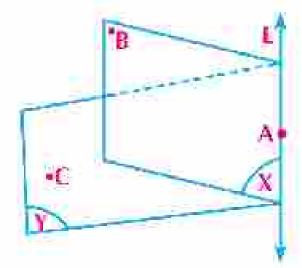


Complétez:

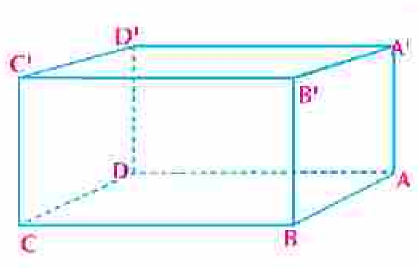
1. La droite L // au plan X alors $L \cap X =$ ....
2. Si la droite $L \subset$ le plan X alors $L \cap X =$ ....
3. Si la droite L_1 // la droite L_2 alors $L_1 \cap L_2 =$ ....
4. Si X ; Y sont deux plans tel que: $X \cap Y = \phi$ alors X .... Y
5. Les deux non coplanaires ne sont ni .... ni ....
6. **Citez le nombre de plans qui passent par :**
   - a) Un point donné.
   - b) Deux points distincts.
   - c) Trois points alignés.
   - d) Trois points non alignés.
   - e) Quatre points non-coplanaires



7. Observez la figure ci-contre, puis complétez en utilisant ($\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$)
   - a) L X
   - b) A X
   - c) C .... Y
   - d) $\overleftrightarrow{BC}$ .... Y
8. Dans la figure ci–contre : X , Y sont deux plans sécants en L , $A \in L$, $B \in X$, $B \notin Y$, $C \in Y$, $C \notin X$. Complétez :
   - a) Le plan X $\cap$ le plan ABC = ...
   - b) Le plan Y $\cap$ le plan ABC = ...
   - c) Le plan X $\cap$ le plan Y $\cap$ le plan ABC = ...



9. **Observez la figure ci – contre, puis complétez:**
   - a) Le plan ABCD // au plan ....
   - b) Le plan BCC'B' // au plan ....
   - c) Le plan ABB'A' $\cap$ Le plan ABCD = ...
   - d) Le plan ABB'A' $\cap$ Le plan DCC'D'= ....
   - e) Le plan DCC'D' $\cap$ Le plan ABCD $\cap$ Le plan ADD'A'= ....



(10) Mettez le signe (✓) devant la phrase juste et le signe (X) devant la phrase fausse
Soient L_1 , L_2 deux droites et X,Y deux plans:

a) Si $L_1 \cap L_2 = \phi$ **alors** $L_1 // L_2$ **ou** L_1 , L_2 sont non coplanaires

b) Si $L_1 \cap X = \phi$ **alors** $L_1 // X$

c) Si $L_2 \cap X = L_2$ **alors** $L_2 \subset X$

d) Si $L_2 \subset Y$ **alors** $L_2 \cap Y = \phi$

e) Si $X \cap Y = \phi$ **alors** $X // Y$

f) Si X = Y **alors** X et Y sont confondus.

Choisissez la bonne réponse :

(11) Quatre points non coplanaires :

a) déterminent deux plans.
b) déterminent trois plans.
c) déterminent quatre plans.
d) ne déterminent pas un plan.

(12) Si deux plans ont deux points A et B en commun, alors ils :

a) sont confondus
b) sont sécants en $\overleftrightarrow{AB}$
c) sont sécants en une droite parallèle à $\overleftrightarrow{AB}$
d) ont un troisième n'appartient point en commun qui n'appartient pas à $\overleftrightarrow{AB}$

(13) $\overleftrightarrow{AB}$ est parallèle au plan X si

a) $\overline{AB} \cap X = \phi$
b) A et B sont situés de part et d'autre de X
c) A et B ne sont pas équidistante de X
d) $\overleftrightarrow{AB} \cap X = \phi$

(14) Les droites L_1 et L_2 sont parallèles si:

a) $L_1 \cap L_2 = \phi$
b) L_1 et L_2 sont inclus dans un même plan
c) $L_1 \cap L_2 = \phi$, L_1 , L_2 sont inclus dans un même plan.
d) $L_1 \cap L_2 = \phi$, L_1 , L_2 sont pas inclus dans un même plan.

(15) Deux droites sont non coplanaires s'elles :

a) ne sont pas parallèles
b) ne sont pas confondues
c) ne sont pas inclus dans un même plan.
d) sont inclus dans un même plan.

Réflexion créative:

(16) Montrez par un dessin que: si trois plans se coupent deux à deux, alors leuss droites d'intersection sont parallèles ou sont concourantes.

3 - 2 Pyramide et cône

Allez apprendre

- Propriétés de quelques solide
- (pyramide – pyramide régulière
- pyramide droite – cône – cône droit).
- Notion du patron d'un solide et déduction des propriétés d'un solide à partir de son patron.
- Modélisation et résolution de problèmes mathématiques et de la vie quotidienne en utilisant les propriétés de la pyramide et du cône.

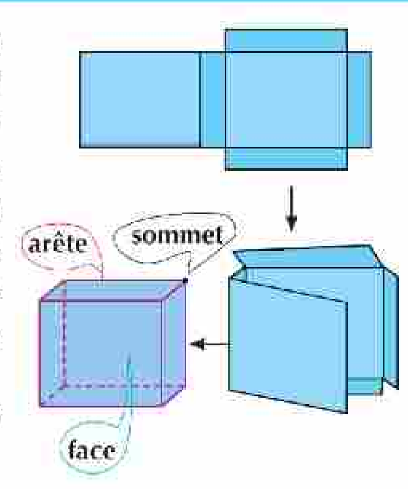
Vocabulaires de base

- Pyramide
- Cône
- Face latérale
- Arête latérale
- Hauteur
- Hauteur latérale
- Pyramide régulière
- Pyramide droite
- Patron
- Cône circulaire

Aides pédagogiques

- Instrument le géométriques
- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme

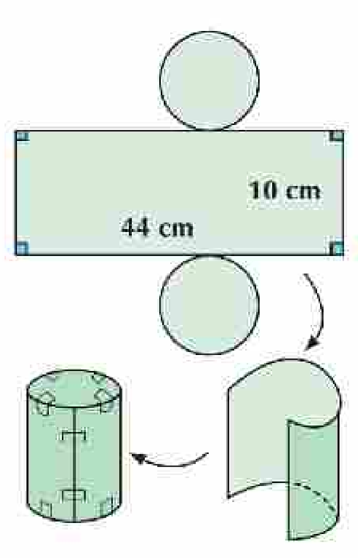
Plusieurs sortes de boîtes sont fabriquées par le pliage de papier cartonné pour former des figures à trois dimensions qu'on utilise pour emballer les produits des usines avant de les commercialiser. Ces figures à trois dimensions occupent une place de l'espace comme le cube, le parallélépipède rectangle etc.



- Le cube admet combien de faces et combien de sommets ?
- Le parallélépipède rectangle admet combien d'arêtes ?
- Les faces d'un cube sont-elles toutes superposables ? Expliquez votre réponse.

La figure qu'on peut plier pour former un solide est appelée le patron du solide à partir duquel, on peut déduire les propriétés du solide

La figure ci-contre montre le patron d'un cylindre droit. On remarque que:



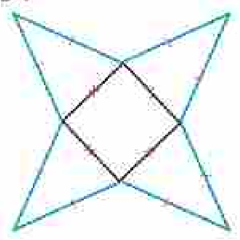
1 - les deux bases du cylindre sont deux cercles superposables

2 - la surface latérale du cylindre avant son pliage le plier est un rectangle de dimensions 44 cm et 10 cm et par conséquent, la hauteur du cylindre est 10 cm.

Quel est la longueur du rayon de la base du cylindre ?

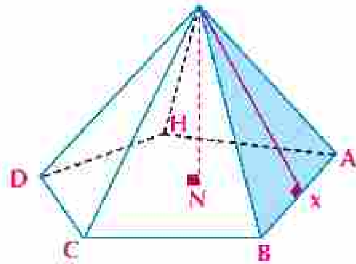
Refﬁchissez:

Peut-on connaitre le nom du solide qu'on peut former en pliant le patron ci-contre ? Peut-on tracer plus qu'un patron pour un même solide ? Expliquez votre réponse.



Pyramide :

C'est un solide qui a pour base un polygone quelconque et pour faces latérales des triangles ayant un sommet commun. La pyramide peut être à base triangulaire ou quadrilatère ou pentagonale etc. selon le nombre de côtés de sa base.



Remarquez que : dans la figure ci-contre, MABCDE est une pyramide pentagonale de sommet M. Sa base est le polygone ABCDE. Ses faces latérales sont les triangles MAB, MBC, MCD, MDH, MHA. Ses arêtes latérales sont $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$, $\overline{MH}$.

La hauteur de la pyramide MN est la distance de son sommet au plan de sa base.

La hauteur latérale de la pyramide MX est la distance de son sommet à un côté de sa base.

Définition

Pyramide régulière

C'est une pyramide de base est un polygone régulier dont le centre est le pied de la hauteur abaissée du sommet de la pyramide sur cette base.



Rappel

Un polygone régulier est un polygone dont les côtés sont de même longueur, les angles sont de même mesure et dont le centre est celui du cercle inscrit ou du cercle circonscrit au polygone.

Propriétés d'une pyramide régulière

1 - **Les arêtes latérales sont de même longueur.**
2 - **Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.**
3 - **Les hauteurs latérales sont de mêmes longueurs.**

Remarques importantes :

La perpendiculaire abaissée du sommet d'une pyramide au plan de sa base est perpendiculaire à toute droite de cette base.

Dans la figure ci-contre, si $\overline{MN}$ est perpendiculaire au plan de la base, alors $\overline{MN} \perp \overline{AC}$, $\overline{MN} \perp \overline{BD}$, $\overline{MN} \perp \overline{NX}$

$\therefore$ Dans ce cas, le triangle MXN est rectangle en N



Example

1. MABCD est une pyramide régulière à base quadrilatère dont la longueur des a base ut 10 cm et de hauteur 12 cm. Calculer sa hauteur.

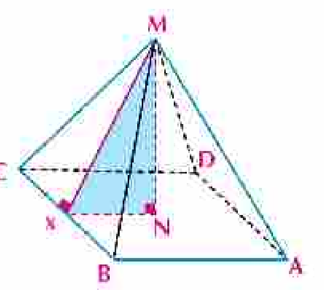


Solution :

$\because$ La pyramide est régulière

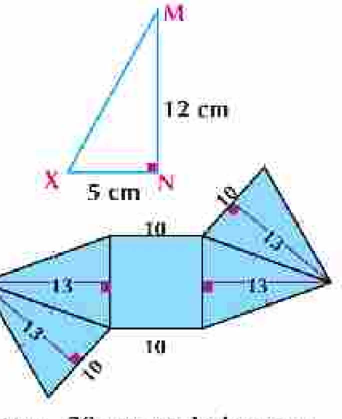
$\therefore$ $\overline{MN} \perp$ est au plan ABCD

où N est le point d'intersection des diagonales du carré ABCD et MN = 12 cm.



Si X est le milieu de $\overline{BC}$ $\therefore$ $\overline{MX} \perp \overline{BC}$ (Pourquoi?)

Alors, $\overline{MX}$ est la hauteur latérale.



Dans △ DBC: N est le milieu de $\overline{DB}$, et X est le milieu de $\overline{MA}$

$\therefore$ NX = $\frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2} \times 10 = 5$ cm

$\because$ $\overline{MN}$ ⊥ plan ABCD

$\therefore$ △ MNX est rectangle en N

$\therefore$ $(MX)^2 = (MN)^2 + (NX)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$

$\therefore$ La hauteur latérale de la pyramide = 13 cm.

La figure ci-contre illustre l'un des patron de la pyramide MABCD.

Essayez de résoudre

1) MABCD est une pyramide régulière à base quadrilatère de hauteur 20 cm et de hauteur latérale 25 cm. Calculez la longueur de sa base.

Pyramide droite

Une pyramide est droite si et seulement si le pied de la hauteur abaissée de son sommet sur sa base est le centre géométrique de cette base.

Réfléchissez :

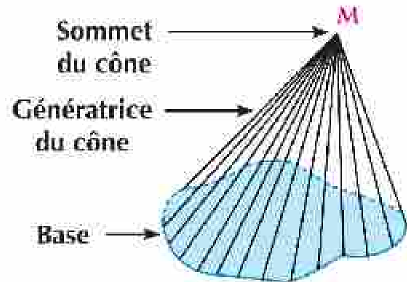
1 - Une pyramide régulière est-elle une pyramide droite ? Expliquez votre réponse.

2 - Les hauteurs latérales d'une pyramide droite sont – elles de même longueur

Note : Une pyramide triangulaire régulière est appelé tétraèdre si ses faces sont toutes des triangles équilatéraux et chacun d'eux peut être la base.

Cône

C'est un solide ayant une seule base sous la forme d'une courbe fermée et un seul sommet. Sa face latérale est formée de tous les points appartenant aux segments reliant son sommet aux points de la courbe sa base. Chaque segment est appelé une génératrice du cône.



Cône droit

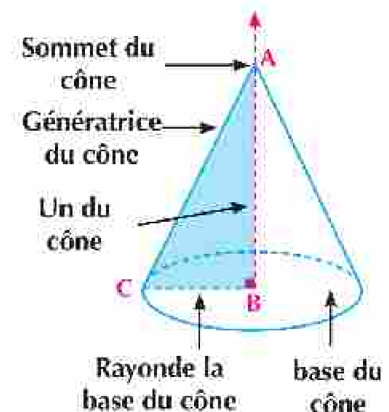
C'est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle d'un tour complet autour de l'un des côtés de l'angle droit. Ce côté est appelé axe de rotation .

Propriétés du cône droit

La figure ci-contre montre un cône circulaire droit engendré par la rotation du triangle rectangle en B d'un tour complet autour de $\overleftrightarrow{AB}$ comme axe. On a :

1- $\overline{AC}$ est la génératrice du cône, A est son sommet, le point C décrit, pendant la rotation, un cercle de centre B et de rayon égal à la longueur de $\overline{BC}$, La surface de ce cercle est la base du cône.

2- $\overleftrightarrow{AB}$ l'axe du cône est perpendiculaire. (⊥) au plan de la base. La hauteur du cône est égale la longueur de $\overline{AB}$.



Example

2 Soit un cône circulaire droit de génératrice de longueur 17 cm et de hauteur 15 cm. Trouvez la longueur du rayon de sa base..

Solution:

On considère la longueur de la génératrice ℓ, la hauteur du cône h. et la longueur du rayon de la base = r

$\because r^2 = \ell^2 - h^2$

$\therefore r^2 = (17)^2 - (15)^2 = 64$

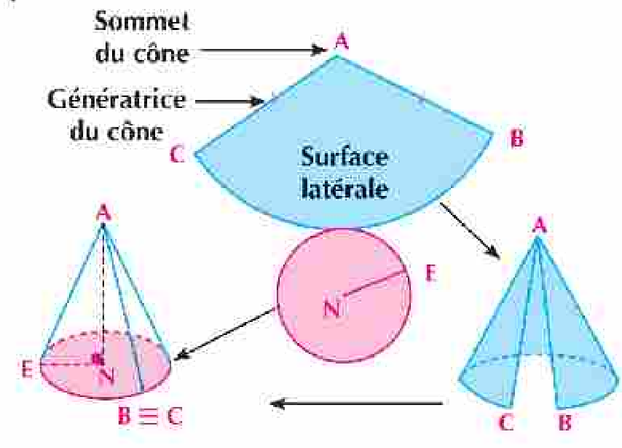
$\therefore r = 8$ cm

Essayez de résoudre

2 Trouvez en fonction de π le périmètre et l'aire de la base d'un cône circulaire droit de hauteur 24 cm et de longueur génératrice 26 cm

Réfléchissez : ABC est triangle tel que AB =AC et D est le milieu de $\overline{BC}$. Si le triangle ABC fait un dème tour complet autour de $\overleftrightarrow{AD}$ comme axe de rotation, cette rotation peut-elle engendrer un cône circulaire droit ? Expliquez votre réponse.

Patron d'un cône droit :



On peut plier le patron d`un cône droit pour fabriquer des boîtes coniques comme le montre la figure ci-contre où:

1 - AB = AC = ℓ **(la longueur de la génératrice du cône)**

2 - Le secteur ABC représente la surface latérale du cône et la longueur de $\overset{\frown}{BC} = 2\pi r$
(r est la longueur du rayon de la base du cône)

3 - La hauteur du cône = la longueur de $\overline{AN}$

Example

3 La figure ci-contre indique le patron d'un cône droit. Á l'aide des informations indiquées, trouvez sa hauteur ($\pi \simeq \frac{22}{7}$).

Solution:

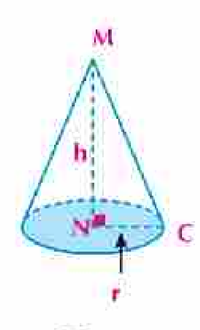
Dans le patron, on remarque que : La longueur de la génératrice du cône = La longueur de $\overline{MA}$ = 21 cm

Le périmètre de la base du cône = la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ = 44 cm.

La longueur du rayon de la base du cône = la longueur de $\overline{CN}$ = r

En pliant le patron du cône, on obtient la figure ci-contre.

Donc: La hauteur du cône = La longueur de $\overline{MN}$ = h



$\because\ 2\pi r = 44$ $\qquad \therefore\ 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$ $\qquad$ **alors** $r = 7$ cm

$\because\ h^2 = L^2 - r^2$

$\therefore\ h^2 = (21)^2 - (7)^2 = 14 \times 28$ $\qquad$ **alors** $h = 14\sqrt{2}$ cm

$\therefore$ La hauteur du cône = $14\sqrt{2}$ cm.

Essayez de résoudre :

3) Dans le patron du cône droit précédent, si MA = 41 cm et la longueur de $\overset{\frown}{AB} = 18\pi$ cm. trouvez la hauteur du cône.

Pensé critique : L'expression suivante est-elle vraie ? « La hauteur d'un cône droit > la longueur de sa génératrice ». Expliquez votre réponse.





Exercices (3 - 2)

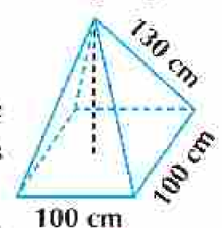
1) Dans une pyramide pentagonale régulière :

- **a** Quel est le nombre de ses faces latérales?
- **b** Quel est le nombre de ses faces?
- **c** Quel est le nombre de ses arêtes latérales?
- **d** Quel est le nombre de ses arêtes?
- **e** La pyramide a un seul sommet autre que les sommets de la base. Quel est le nombre de tous les sommets d'une pyramide pentagonale ? Est-ce que votre réponse vérifie la relation d'Euler pour tout solide à base polygonale ?

«Nombre de faces + nombre de sommets = Nombre d'arêtes + 2»

2) Dans une pyramide régulière, rangez les longueurs suivantes de la plus petite à la plus grande

- **a** la longueur de l'arête latérale
- **b** la hauteur de la pyramide
- **c** la hauteur latérale



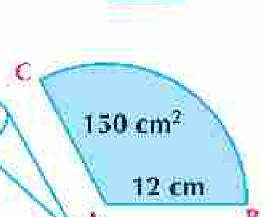
3) **Génie civil:** La figure ci-contre montre un réservoir d'eau sous la forme d'une pyramide régulière à base quadrilatère. Á l'aide des informations indiquées, trouver la hauteur latérale et la hauteur.

4) **4 En lien avec le scoutisme :** Soit une tente sous la forme d'un cône circulaire droit de hauteur 160 cm et de périmètre de base 753,6 cm. Calculez la longueur de la génératrice du cône représentant la tente.

160 cm

5) **En lien avec le tourisme:** La grande pyramide de Gizeh (pyramide de Khéops) a pour longueur de base 232 mètres et de hauteur latérale 186 mètres. Calculez la hauteur de cette pyramide..

6) **En lien avec l'industrie:** On met le lait dans un emballage sous forme d'un cône circulaire droit en pliant un papier isolant thermique sous forme d'un secteur circulaire de longueur de rayon de cercle de 12 cm et d'aire 150 cm^2 de sorte que les deux rayons $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ se touchent. Trouvez la hauteur du cône.



[Rappel : l'aire d'un secteur circulaire = $\frac{1}{2}$ longueur de son arc × la longueur du rayon de son cercle].

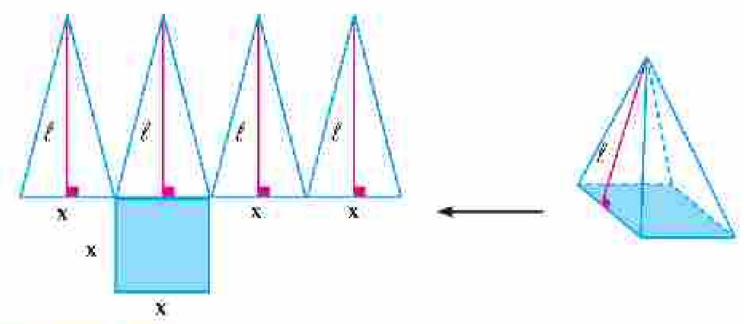
Aire latérale et aire totale d'une pyramide et d'un cône



Vous avez déjà étudié les propriétés d'une pyramide régulière et d'un cône circulaire droit et vous avez déduit certaines de ses propriétés à partir de leurs patrons. Maintenant, pouvez-vous calculer l'aire latérale et l'aire totale de chacun des deux solides à partir de leurs patrons ? Expliquez votre réponse

Aire totale d'une pyramide régulière

La figure suivante montre une pyramide régulière à base carrée et l'un de ses patrons.



Remarquez que: Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables et que les hauteurs latérales sont de même longueur = ℓ.
La base de la pyramide est un polygone de longueur de côté = x et on a :
Aire latérale de la pyramide = La sommes des aires des faces latérales

= sum of the area of the lateral faces.

$$= \frac{1}{2}\, x \times \ell + \frac{1}{2}\, x \times \ell + \frac{1}{2}\, x \times \ell + \frac{1}{2}\, x \times \ell$$

$$= \frac{1}{2}\,(x + x + x + x)\,\ell$$

$= \frac{1}{2}$ le périmètre de la base de la pyramide de × la hauteur latérale

Aire totale de la pyramide = Son aire latérale + L'aire de sa base.



A apprendre

Aire latérale d'une pyramide régulière = $\frac{1}{2}$ du périmètre de sa base × La hauteur latérale.
Aire totale d'une pyramide =
Son aire latérale + L'aire de sa base.

Allez apprendre

- Calcul de l'aire latérale et l'aire totale d'une pyramide régulière et d'un cône droit.
- Modélisation et résolution de problèmes mathématiques et de la vie quotidienne com-portant l'aire latérale d'une pyramide et d'un cône droit.

Vocabulaires de base

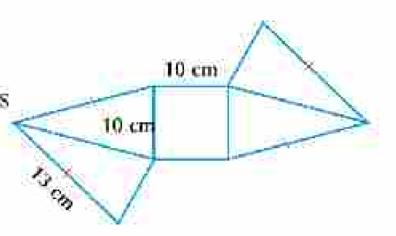
- Aire latérale
- Aire totale

Aides pédagogique

- *Calculatrice scientifique*
- *Logiciels de graphisme*



Exemple



1. En utilisant le patron ci-contre, décrivez le solide puis calculez son aire totale.

Solution

Le patron est celui d'une pyramide régulière à base carrée.

Sa base est un carré de 10 cm de longueur. La longueur de son arête latérale = 13 cm.

$\because$ La face latérale MAB est un triangle isocèle et $\overline{ME}$ est une hauteur latérale.

$\therefore$ E est le milieu de $\overline{AB}$ d'où AE = 5 cm

Dans $\triangle$ MAE rectangle en E, on a :

$(ME)^2 = (AM)^2 - (AE)^2$

$(ME)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$

$\therefore$ M E = 12 cm

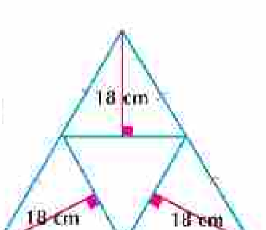
$\because$ L'aire latérale d'une pyramide régulière = $\frac{1}{2}$ du périmètre de sa base × La hauteur latérale

$\therefore$ L'aire latérale $= \frac{1}{2} \times (10 \times 4) \times 12 = 240$ cm^2

$\because$ L'aire de la base de la pyramide $= (10)^2 = 100$ cm^2

$\therefore$ L'aire totale de la pyramide $= 240 + 100 = 340$ cm^2

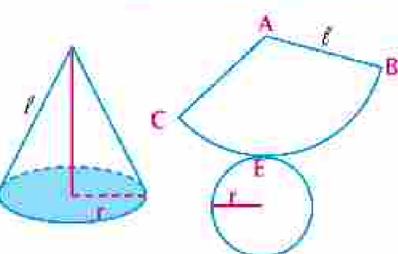
Essayiez de résoudre



1. En utilisant le patron ci-contre, décrivez le solide puis calculez son aire totale.

Aire totale d'un cône droit

D'après le patron du cône droit de la figure ci-contre :



L'aire du secteur ABC $= \frac{1}{2}$ AB × La longueur de l'arc $\widehat{BC}$

$= \frac{1}{2}\ \ell\ \times$ Le périmètre de la base du cône

$= \frac{1}{2}\ \ell \times 2\pi r = \pi \ell r$

= L'aire latérale du cône

L'aire totale du cône = son aire latérale + aire de sa base



A apprendre

Aire latérale d'un cône droit = $\pi \ell r$

Aire totale d'un cône droit $= \pi \ell r + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$

où ℓ est la longueur de sa génératrice et r est la longueur du rayon du cercle de la base



Rappel :

Secteur circulaire

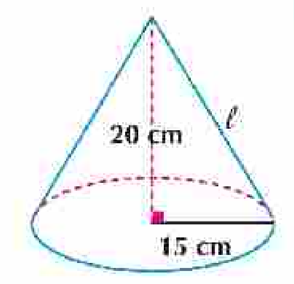
$\theta^{rd} = \frac{\ell}{r}$

Périmètre du secteur = $2r + \ell$

Aire du secteur = $\frac{1}{2} r\ell - \frac{1}{2}\theta^{rd} r^2$

Exemple

2 Calculez l'aire latérale d'un cône droit de longueur de rayon de base 15 cm et de hauteur 20 cm.



Solution

Pour trouver la longueur de la génératrice du cône ℓ

$\because \ell^2 = (20)^2 + (15)^2 = 625$

$\therefore \ell = 25$ cm

$\because$ Aire latérale du cône $= \pi \ell r$, r = 15 cm

$\therefore$ Aire latérale du cône droit $= 25 \times 15\pi = 375\,\pi$ cm^2

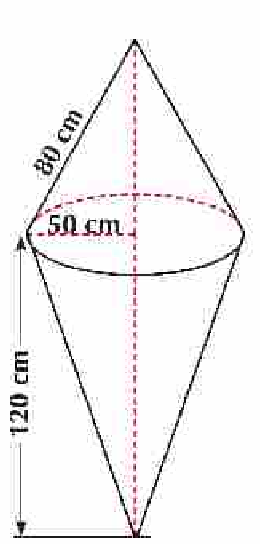
Essayiez de résoudre

2 Calculez l'aire totale d'un cône droit de longueur génératrice 17 cm et de hauteur 15 cm.

Exemple

3 **Navigation maritime :** La figure ci-contre montre un signal indicateur (une bouée) pour déterminer le trajet maritime. Ce signal est sous la forme de deux cônes droits ayant une même base.

Trouvez le coût de sa peinture d'une matière résistante à l'érosion sachant que le coût d'un mètre carré est de 300 L.E.



Solution:

L'aire de la surface du signal indicateur =

l'aire latérale du premier cône + l'aire latérale du deuxième cône

Premier cône: $\ell_1 = 80$ cm , r = 50 cm

$\therefore$ l'aire latérale $= 50 \times 80\,\pi$

$= 4000\pi$ cm^2

Deuxième cône : h = 120 cm , r = 50 cm

$\therefore \ell_2 = \sqrt{(120)^2 + (50)^2} = 130$ cm

$\therefore$ L'aire latérale $= 50 \times 130\pi = 6500\,\pi$ cm^2

L'aire de la surface du signal indicateur $= (4000 + 6500)\pi = 10500\,\pi$ cm^2

$\simeq 3{,}299$ mètres carrés

Le coût de la peinture $= 3{,}299 \times 300 = 989{,}7$ L.E



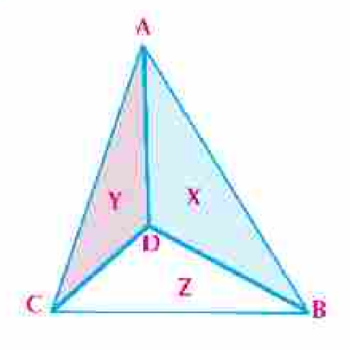
Essayiez de résoudre

3 Un abat-jour sous la forme d'un cône droit a pour périmètre de base 88 cm et pour hauteur 20 cm. Calculez son aire à un centimètre carré près.





Exercises (3 -3)

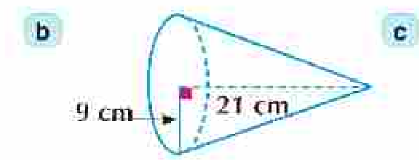


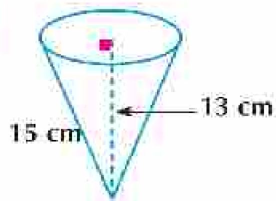
1. La figure ci – contre représente une pyramide triangulaire. X, Y et Z sont trois plans. Complétez :

   a. $X \cap Y =$ ....
   b. $X \cap Z =$ ....
   c. $Y \cap Z =$ ....
   d. $\overleftrightarrow{AB} \cap X =$ ....
   e. $\overleftrightarrow{BC}$ .... X , $\overleftrightarrow{BC}$ .... Z
   f. $X \cap Y \cap Z =$ ....

2. Trouvez l'aire latérale et l'aire totale de chacune des pyramides régulières suivantes à l'aide des informations données

   a 

   b 

   c 

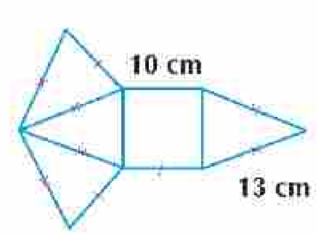
3. Trouvez l'aire latérale et l'aire totale de chacun des cônes droits suivants à l'aide des informations données.

   a 12 cm, 6 cm
   b 9 cm, 21 cm
   c 13 cm, 15 cm

4. Soit une pyramide régulière à base hexagon dont la de longueur du côté de base est 12 cm et de hauteur latérale $10\sqrt{3}$ cm. Trouvez :

   a. Son aire latérale
   b. Son aire totale

5. **En lien avec l'industrie :** Les boîtes d'une usine sont fabriquées à partir de papier cartonné, en pliant le patron indiqué dans la figure ci-contre.



   a. Trouvez l'aire du papier cartonné utilisé pour produire 1000 boîtes.
   b. Calculez le coût du papier cartonné utilisé sachant que le coût d'un mètre carré de celui-ci est 15 L.E.

6. Soit un morceau de papier cartonné sous forme d'un secteur circulaire de longueur de rayon de cercle 36 cm et de mesure d'angle au centre 210°°. On le plie pour fabriquer un cône circulaire droit. Trouver la hauteur du cône. (L'aire d'un secteur circulaire $= \frac{1}{2} r^2 \theta^{rd}$, où r est la longueur du rayon du cercle du secteur et . θ^{rd} est la mesure de l'angle au centre en radian).

7. Trouvez la longueur du rayon du cercle de la base d'un cône droit si la longueur de sa génératrice est 15 cm et son aire totale est $154\,\pi$ cm^2.

Volume d'une pyramide et d'un cône droit

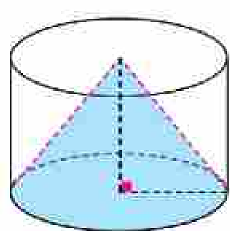




Réfléchissez et discutez

Vous avez déjà appris comment calculer le volume d'un prisme droit et le volume d'un cylindre circulaire droit

Pouvez-vous estimer le volume d'une pyramide en fonction du volume d'un prisme droit ayant la même aire de base et la même hauteur ?



Pouvez- vous estimer le volume d'un cône droit en fonction du volume d'un cylindre ayant la même aire de base et la même hauteur ?



Activité

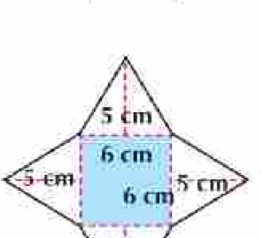
Comparaison entre le volume d'une pyramide et le volume d'un prisme ayant une même aire de base et une même hauteur..

1- Tracez sur un papier cartonné le patron de la pyramide et celui du prisme indiqué dans la figure ci-contre.

4 cm
4 cm 6 cm 4 cm
6 cm
4 cm

2- Découpez et pliez chaque patron pour former une face la térale d'une pyramide à base carrée et un prisme droit ouvert du haut..

3- Remplissez la pyramide de grains de riz ou de sable puis la vider dans le prisme. Répétez la même opération jusqu'à ce que le prisme soit rempli complètement.



Remarquer que le contenu (les grains de riz ou de sable) nécessaire pour remplir le prisme est égal au triple du contenu nécessaire pour remplir une pyramide.

Donc le volume d'une pyramide = $\frac{1}{3}$ du volume du prisme ayant la même aire de base (b) et la même hauteur (h) que la pyramide.

Allez apprendre

- Calcul du volume d'une pyramide régulière.
- Calcul du volume d'un cône droit.
- Modélisation et résolution de problèmes mathématiques et de la vie quotidienne comportant le volume d'une pyramide régulière et le volume d'un cône droit.

Vocabulaires de base

- Sommet
- Base
- Face
- Axe
- Rayon
- Volume

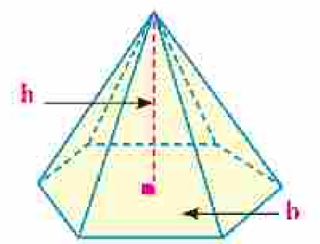
Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Logiciels de graphisme.

Volume d'une pyramide



Á apprendre



Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

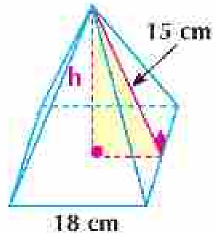
Donc : Le volume d'une pyramide $= \frac{1}{3}$ b × h

où b est la base de la pyramide et h est la hauteur de la pyramide.

Exemple

(1) Calculez le volume d'une pyramide à régulière base quadrilatère ayant pour longueur de côté de la base 18 cm et de hauteur latérale 15 cm..

Solution:



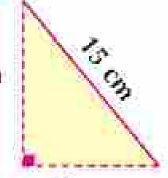
a) Calcul de l'aire de la base de la pyramide (b)

$\because$ La pyramide est régulière à base quadrilatère.

$\therefore$ Sa base a la forme d'un carré.

Aire de la base de la pyramide (b) = $18 \times 18 = 324$ cm²

a) Calcule de la hauteur de la pyramide (h)



$\because h^2 + (9)^2 = (15)^2$ théorème de Pythagore

$\therefore h^2 = (15)^2 - (9)^2 = 144$, h = 12 cm

$\because$ Volume d'une pyramide $= \frac{1}{3}$b × h

$\therefore$ Volume de la pyramide $= \frac{1}{3} \times 324 \times 12 = 1296$ cm³



Rappel

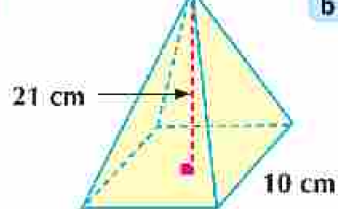
L'aire d'un polygone à n côtés de longueur de côté x est égale à $\frac{n}{4} x^2 \cot\text{an} \frac{\pi}{n}$



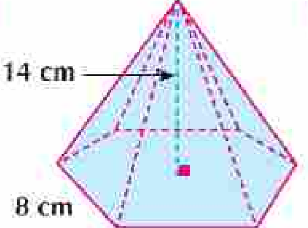
Essayiez de résoudre

(1) Trouvez le volume de chacune des pyramides régulières suivantes à l'aide des informations indiquées .

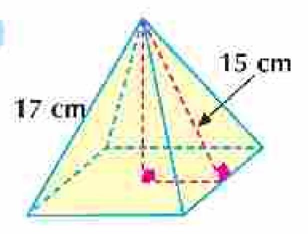
a



b



c

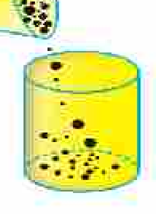


Réfléchissez : En comparant les volumes d'un cône circulaire droit et d'un cylindre droit ayant la même aire de base et la même hauteur, on trouve que :

Volume d'un cône = $\frac{1}{3}$ du volume du cylindre.

Comment peut-on interpréter cela mathématiquement ?

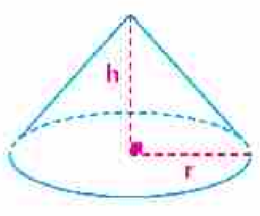




Volume d'un cône



À apprendre



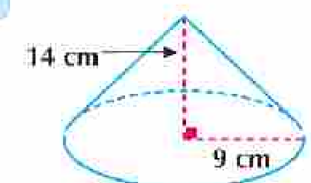
Le volume d'un cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

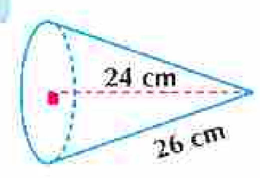
Donc : Le volume d'un cône $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

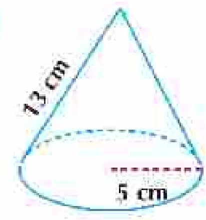
Où r est la longueur de rayon du cercle de la base du cône et h est la hauteur du cône.

Essayiez de résoudre

2) Trouvez le volume du cône droit dans chacune des figures suivantes en utilisant les informations indiquées.

a


b


c


Exemple

2) **En lien avec la physique :** Un alliage d'or pur est sous la forme d'un cône droit de hauteur 4,2 cm et de longueur de rayon de base 1,5 cm. Trouver la densité de l'or sachant que la masse d'alliage est 191 grammes.

Solution

$\therefore$ Volume d'un deun l'alliagé $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $r = 1{,}5$ cm , $h = 4.2$ cm

$\therefore$ La masse volumiqué de l'or $= \frac{\pi}{3}(1{,}5)^2(4.2) = 9{,}896$ cm^3

$\therefore$ La masse volumiqué $= \frac{\text{mass}}{\text{volume}}$ $\therefore$ la masse volumiqué de l'or $= \frac{191}{9{,}896} \simeq 19{,}3$ gm/cm^3

Essayiez de résoudre

3) Un morceau du chocolat est sous la forme d'un cône droit de volume 27π cm^3 et de périmètre de base 6π cm. Trouvez sa hauteur.

Exemple

3) **En lien avec l'industrie :** Une pyramide régulière à base pentagone est fabriquée de cuivre. La longueur du côté du polygone de la base est 10 cm et la hauteur de la pyramide est égale à 42 cm. Elle a été fondue et transformée en un cône circulaire droit de longueur de rayon de base 15 cm. Sachant que 10% du cuivre est perdu durant la fente et la transformation, trouver la hauteur du cône à un dixième près.

Solution

$\because$ L'aire du pentagone régulier $= \frac{5}{4}x^2 \cot g \frac{\pi}{5}$ (où x est la longueur de côté du pentagone)

$\therefore$ L'aire de la base de la pyramide $= \frac{5}{4} \times 10 \times 10 \cot g\, 36° = \frac{125}{\tan 36°} \simeq 172$cm^2

$\because$ Le volume de la pyramide $= \frac{1}{3}$ aire de la base $\times$ hauteur $= \frac{172}{3} \times 42 = 2408$ cm^3

$\therefore$ Le volume du cuivre contenu dans le cône $= \frac{90}{100} \times 2408 = 2167.2$cm^3

$\frac{\pi}{3}(15)^2 h = 2167.2$ où h est la hauteur du cône droit

$\therefore h = \frac{2167.2 \times 3}{225\pi} \simeq 9.2$ cm

Essayiez de résoudre

4) On fait fondre un cube en cire de 20 cm de longueur d'arête et on le transforme en un cône circulaire droit de hauteur 21 cm. Trouver la longueur du rayon de la base du cône sachant que 12 % de la cire a été perdue durant la fente et la transformation..

Remarque importante : la capacité d'un container est estimée par le volume du liquide qu'il contient. Pour calculer la capacité d'un container, on utilise les mêmes lois de calcul de volume et l'unité de mesure de la contenance est le litre.



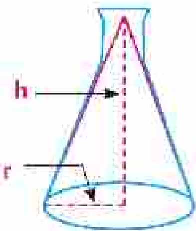
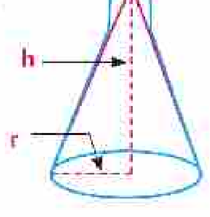
Rappel

La capacité d'un corps creux est le volume de son espace intérieur

1 litre = 1000 millilitre = 1000 cm^3 = dm^3

Exemple

4) **En lien avec la chimie :** Une fiole de forme conique a pour capacité 154 ml et pour hauteur 12 cm. Trouver la longueur du rayon de sa base $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

Solution

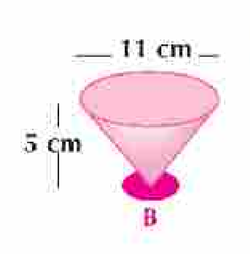
Capacité de la fiole = volume du cône droit = 154 cm^3

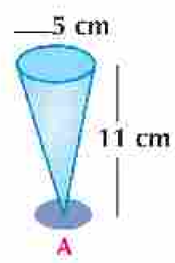
$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times r^2 \times 12 = 154 \quad \therefore r^2 = \frac{49}{4}$

$\therefore r = 3.5$ cm

Essayiez de résoudre

5) A et B sont deux verres. Quel est le verre qui a la plus grande capacité ? Trouvez la différence entre leurs capacités.





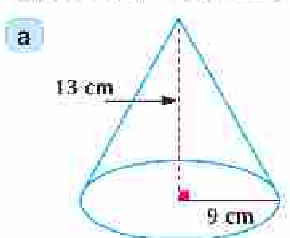


Exercises (3 - 4)

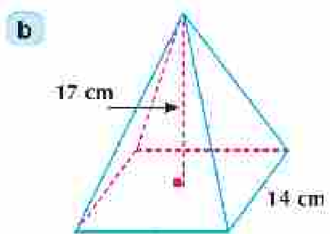


1. Trouvez le volume d'une pyramide régulière à base quadrilatère sachant que la longueur du côté de la base est 20 cm et la hauteur de la pyramide est égale à 36 cm.
2. Calculez à un dixième près le volume d'une pyramide régulière à base pentagone sachant que la longueur du côté de la base est 40 cm et la hauteur de la pyramide est 10 cm.
3. Une pyramide régulière à base quadrilatère a pour hauteur 9 cm et pour volume 300 cm^3. Trouvez la longueur du côté de sa base.
4. Une pyramide régulière à base quadrilatère a pour aire de base 700cm^2 et pour hauteur latérale 20 cm. Calculez son volume.
5. Quel est le solide qui a le plus grand volume? un cône droit de longueur de rayon de base 15 cm et de hauteur 20 cm ou une pyramide régulière à base quadrilatère de hauteur 40 cm et de périmètre de base 48 cm.
6. Trouvez le volume d'un cône droit de périmètre de base 44 cm et de hauteur 25 cm.
7. Trouvez le volume d'un cône droit d'aire latérale 220 cm et de longueur de génératrice14 cm.
8. Rangez les solides suivants du plus petit volume au plus grand volume.

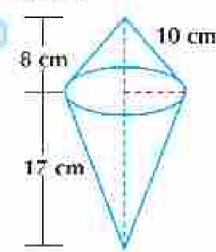
a



b



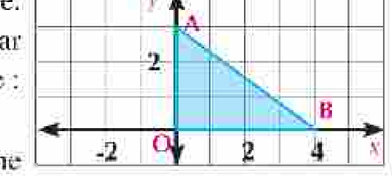
c



9. **En lien avec le tourisme :** On fabrique une maquette de la grande pyramide en alliage de densité 3,2 g/cm^3. Si la longueur du côté de la base de la maquette est 11,5 cm et sa hauteur est 7 cm, calculer sa masse à un dixième près.
10. **En lien avec la physiques:** Dans un récipient de forme cylindrique contenant de l'eau, on plonge totalement un corps métallique sous forme d'un cône droit de hauteur 12 cm et de longueur de rayon de base 2 cm. Le niveau de l'eau s'est levé d'un centimètre. Trouver la longueur du diamètre de la base du récipient..
11. **Génie civil :** Un réservoir d'eau sous forme d'un cône droit a pour volume 32 $\pi$$m^3$ et pour hauteur 6 m. trouvez la longueur du rayon de sa base et son aire totale.

6 m

12. 12 La figure ci-contre indique un repère orthonormé. Calculer en fonction de π le volume du solide engendré par la révolution du triangle ABO d'un tour complet autour de :
    - **a** L'axe des abscisses
    - **b** L'axe des ordonnés.



13. **Réflexion créative :** Un cônecirculair droit de volume 100 cm^3. Calculez son volume si
    - **a** Sa hauteur double.
    - **b** La longueur du rayon de sa base double.
    - **c** Sa hauteur et le rayon de sa base doublent. Que peut-on conclure. Expliquez votre réponse.

3 - 5 Equation du cercle

Allez apprendre

- Ecrire l'équation d'un cercle en fonction des coordonnées de son centre et la longueur de son rayon.
- La forme générale de l'équation d'un cercle.
- Déterminer les coordonnées du centre d'un cercle et la longueur de son rayon à partir de la forme générale de son équation.
- Modéliser et résoudre des problèmes de la vie quotidienne comportant l'équation d'un cercle.

Vocabulaires de base

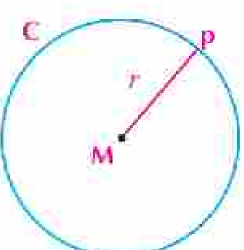
- Cercle
- Centre
- Rayon
- Diamètre
- Repère
- Equation
- Forme générale

Aides pédagogiques

- Calculatrice scientifique
- Papiers quadrillés

Le cercle :

C'est un ensemble de points du plan qui se trouvent à une distance donnée d'un point fixe du plan.



Le point fixe est le centre du cercle et on le note d'habitude M. La distance donnée est appelée le centre du cercle et on la note r. Le cercle est noté par C.

L'équation d'un cercle :

L'équation d'un cercle est la relation entre l'abscisse et l'ordonné d'un point quelconque appartenant au cercle et tout couple $(x ; y)$ vérifiant cette relation (équation) représente un point qui appartient à ce cercle.

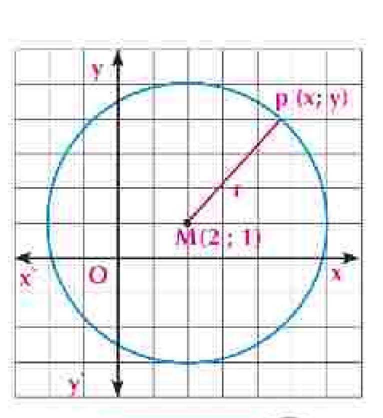
Dans un repère orthonormé

Si le point $P(x ; y)$ appartient à un cercle C de centre $M(2 ; 1)$.
et de rayon
4 unités de longueur, alors $MP = r = 4$ En appliquant la formule de la distance entre deux points, on obtient:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (4)^2$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

est l'équation du cercle C.



Rappel

La distance entre deuse points (x_1, y_1), (x_2, y_2) = $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



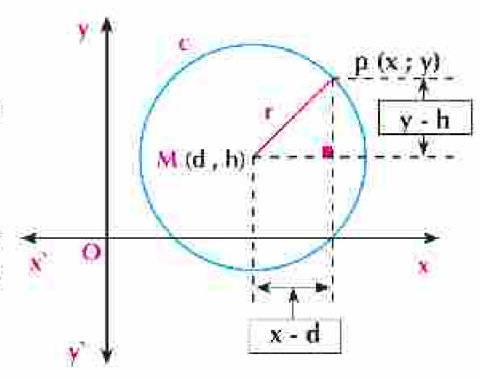
A apprendre

Equation du cercle

(en fonction des coordonnées de son centre et de la longueur de son rayon)

Dans un repère orthonormé :

Si le point P (x ; y) appartient au cercle C de centre le point M (d ; h) et de rayon de longueur r unités, alors l'équation du cercle est :



$$(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$$

Exemple

1. Ecrivez l'équation du cercle de centre le point M(5 ; 2) et de longueur de rayon 6 unités.

Solution

Soit P (x ; y) ∈ au cercle C

∵ Le centre du cercle est le point M(5 ; 2) et le longueur de son rayon = 6 unités

∴ d = 5 , h = 2 , r = 6

, Donc l'équation du cercle est : $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = (6)^2$

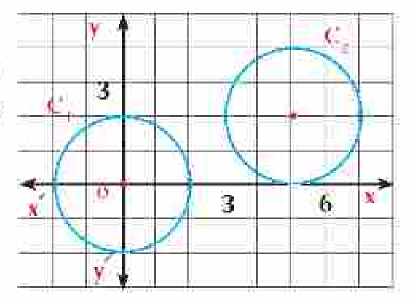
d'où : $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 36$

Essayez de résoudre

1. Ecrivez l'équation du cercle de centre M dans chacun des cas suivants :
   - **a** M (4 ; -3) , et la longueur de son rayon est égale à 5 unités.
   - **b** M (7 ; -1) , et la longueur de son rayon est égale à 8 unités.
   - **c** M (2 ; 0) , et la longueur de son rayon est égale à $\sqrt{28}$ unités.
   - **d** M (0 ; -5) , et le cercle passe par le point (-2 ; -9)
   - **e** M est le point d'origine et la longueur de son rayon est égale à r unités.

Exemple

2. La figure ci-contre représente deux cercles C_1 et C_2, Démontrez que les deux cercles sont superposables puis trouvez l'équation de chacun d'eux.



Solution

Deux cercles sont superposables si leurs rayons sont de même longueur.

Le cercle C_1: a pour centre (0 ; 0), et pour longueur de rayon $r_1 = 2$ unités .

Le cercle C_2: a pour centre (5 ; 2), et pour longueur de rayon $r_2 = 2$ unités.

∵ $r_1 = r_2 = 2$ ∴ Les deux cercles sont superposables.

L'équation de c_1 est $x^2 + y^2 = 4$,

et l'équation de c_2 est $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$

On remarque que : le cercle C_2 est l'image du cercle C_1 par la translation $(5 ; 2)$

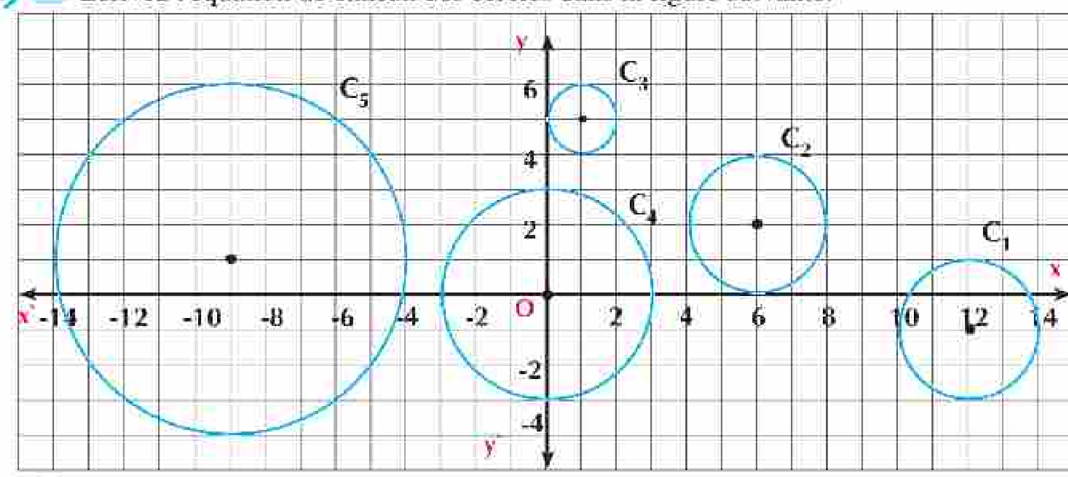


L'image du point (h, k) par la translation (a, b) est (h+a, k+b)

Pensé critique : Si le cercle C_3 est l'image du cercle C_1 par la translation $(-4 ; 3)$, écrivez l'équation du cercle C_3.

Essayez de résoudre

(2) **a** Écrivez l'équation de chacun des cercles dans la figure suivante:



b Lesquels des cercles précédants sont superposables ? Expliquez votre réponse.

Réfléchissez : Où se trouve le point $(x_1; y_1)$ par rapport au cercle C: $(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$ si:

a $(x_1 - d)^2 + (y_1 - h)^2 > r^2$ **b** $(x_1 - d)^2 + (y_1 - h)^2 < r^2$

Exemple

(3) Démontrez que le point $(4 , -1)$ est un point du cercle C d'équation : $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 37$

Solution

En substituant par les coordonnées du point $(4 ; -1)$ dans le membre gauche de l'équation du cercle.

$\therefore$ $(4 - 3)^2 + (-1 - 5)^2 = 1 + 36 = 37$ = membre de droite.

$\therefore$ Le point $(4 ; -1)$ appartient au cercle C.

On remarque que: Si $(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 5)^2 > 37$ alors le point $(x_1 ; y_1)$ est situé à l'extérieur du cercle C. et si $(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 5)^2 < 37$ alors le point $(x_1 ; y_1)$ est situé à l'intérieur du cercle C.

Essayez de résoudre

(3) Lequel des points suivants appartient au cercle C d'équation : $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 25$? Déterminez la position des autres points par rapport au cercle C où :

A(9 ; 3) , B(7 ; 5) , C(3 ; 3) , E(2 ; -3)

Exemple

4 Écrivez l'équation du cercle ayant pour diamètre $\overline{AB}$ où A(2 ; -7) , B(6 ; 5) .



Les coordonnées du milieu de la distance entre les points $(x_1 ; y_1)$ et $(x_2 ; y_2) = (\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2})$

Solution

Soit M(d ; e) le centre du cercle de diamètre $\overline{AB}$. Alors le point M est le milieu de $\overline{AB}$.

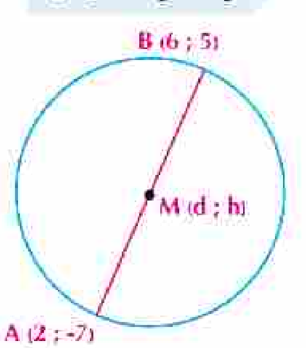
$\therefore$ Les coordonnées du point M : $d = \frac{2+6}{2} = 4$, $e = \frac{-7+5}{2} = -1$

$r^2 = (AM)^2 = (4-2)^2 + [-1-(-7)]^2$

$= (2)^2 + (6)^2 = 40$

Donc l'équation du cercle est : $(x - 4)^2 + [y - (-1)]^2 = 40$

Donc : $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 40$



Réfléchissez : Est-ce que le point (6 , 5) vérifie l'équation du cercle ? Pourquoi ?

Est-ce que le point (6 ; –7) appartient au cercle précédent ? Expliquez votre réponse.

Essayez de résoudre

4 Écrivez l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :

a Si le centre du cercle est le point M(–2 ; 7) et il passe par le point A(2 ; 10)..

b Si le centre du cercle est le point M(5 ; 4) et il est tangent à la droite d''equation x = 2

c Si M le centre du cercle est situé dans le premier quadrant du repère et si la longueur de son rayon est égale à 3 unités et les deux droites d'équations x = 1 et y = 2 sont tangentes au cercle.

Exemple

5 Trouvez les coordonnées du centre du cercle et la longueur de son rayon pour les deux cercles d'équations :

a $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ **b** $(x + 1)^2 + y^2 = 16$

Solution

On sait que l'équation d'un cercle en fonction des coordonnées de son centre (d ; e) et de la longueur de son rayon r est :

$(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$

En comparant chaque expression algébrique dans l'équation précédente à son correspondant dans l'équation donnée, on trouve que :

a $x - d = x - 2$ $\therefore d = 2$

$y - h = y + 3$ $\therefore h = -3$

$r^2 = 17$ $\therefore r = \sqrt{17}$

Donc le centre du cercle est le point (2 ; -3) et la longueur de son rayon est égale à $\sqrt{17}$ unités.

b $x - d = x + 1$ $\therefore d = -1$

$y - h = y$ $\therefore h = 0$

$r^2 = 16$ $\therefore r = 4$

$\therefore$ le centre du cercle est le point $(-1\ ;\ 0)$ et la longueur de son rayon est égale à 4 unités.



Essayez de résoudre

(5) Lequel des cercles donnés représente un cercle de centre $(3\ ;-4)$ et de longueur de rayon 3 unités.

a $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ **b** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

c $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ **d** $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

(6) Trouvez les coordonnées du centre et la longueur du rayon de chacun des cercles suivants :

a $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 15$ **b** $x^2 + (y + 4)^2 = 9$

c $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 = \frac{3}{4}$ **d** $(x + 1)^2 = 13 - y^2$

Á apprendre

Forme générale de l'équation d'un cercle

On sait que l'équation d'un cercle en fonction des coordonnées de son centre $(d\ ;\ h)$ et de la longueur de son rayon r est :

is : $(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$ **En simplifiant l'expression**

$\therefore x^2 + y^2 - 2dx - 2hy + d^2 + h^2 - r^2 = $ zero (1)

$\because$ d, h et r sont constants $\therefore$ l'expression $d^2 + h^2 - r^2 = C$ (où C est une valeur constante En)

en posant $L = -d$, $k = -h$, $C = d^2 + h^2 - r^2$

Dans ce cas, l'équation (1) devient de la forme $x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + C = 0$

Cette équation est appelée la forme générale de l'équation d'un cercle de centre $(-L\ ;\ -K)$ et de longueur de rayon r telle que

$r = \sqrt{L^2 + k^2 - C}$, $L^2 + k^2 - C > 0$

Exemple

(6) Trouvez la forme générale de l'équation du cercle de centre $(6\ ;-3)$ et de longueur de rayon de 5 unités.

Solution

$\because$ Le centre du cercle dans la forme générale est $(-L\ ;-K)$

, et le centre du cercle est $(6\ ;-3)$ **donné**

$\therefore L = -6$, $k = 3$

$\because r = 5$, $C = L^2 + k^2 - r^2$

$\therefore C = (-6)^2 + (3)^2 - (5)^2 = 20$

Dans ce cas, la forme générale de l'équation du cercle est : $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$.

Nous pouvons vérifier la solution en utilisant l'équation du cercle:

$(x - 6)^2 + (y + 3)^2 = 25$ puis la simplifier et comparer les résultats.

Essayez de résoudre

7) Écrivez la forme générale de l'équation du cercle si :

a) Son centre est le point M $(-2\ ;\ 5)$ et la longueur de son rayon est égale à $\sqrt{57}$ unités.

b) Son centre est le point N $(5\ ;\ -3)$ et le cercle passe par le point $B(2\ ;\ 1)$.

Exemple

7) Écrivez la forme générale de l'équation du cercle dont les deux points A $(4\ ;\ 2)$, et B $(-1\ ;\ -3)$ sont les extrémités de l'un de ses diamètres.

Solution

Soit le point M $(-L\ ;-K)$ le centre du cercle où $\overline{AB}$ est un diamètre .

$\therefore$ M est le milieu de $\overline{AB}$, , et les coordonnées du point M sont $(\frac{4-1}{2}, \frac{2-3}{2})$

$\therefore -L = \frac{3}{2}$ $\qquad L = \frac{-3}{2}$

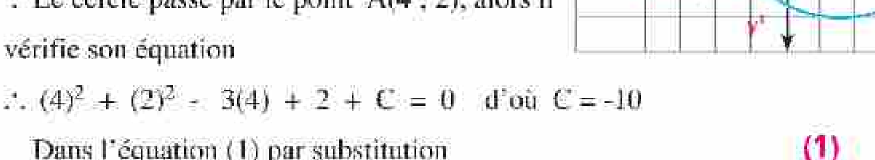
$-k = \frac{-1}{2}$ $\qquad k = \frac{1}{2}$

En remplaçant L et k dans la forme générale de l'équation du cercle :

$x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + C = 0$

$\therefore x^2 + y^2 - 3x + y + C = 0$ **(1)**

$\because$ Le cercle passe par le point $A(4\ ;\ 2)$, alors il vérifie son équation



$\therefore (4)^2 + (2)^2 - 3(4) + 2 + C = 0$ d'où $C = -10$

Dans l'équation (1) par substitution **(1)**

$\therefore$ L'équation générale du cercle est : $x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0$

Essayez de résoudre

8) Si les points $A(3\ ;-2)$, $B(3\ ;\ 8)$ et $C(-1\ ;\ 0)$ appartiennent au même cercle, démontrez que $\overline{AB}$ et un diamètre du cercle puis écrivez la forme générale de son équation.

Remarque importante

De la forme générale de l'équation du cercle : $x^2 + y^2 + 2Lx + 2Ky + C = 0$

on déduit que :

1) L'équation est du second degré en x , y

2) Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité.

3) L'équation n'admet pas un terme en x y c'est-à-dire le coefficient de x y est égal à 0

Pour qu'une équation du second degré en x et y représente un cercle il faut que les trois conditions précédentes soient réalisées et que $L^2 + K^2 - C > 0$.



A apprendre

Détermine les coordonnés du centre d'un cercle et la longueur de son rayon

Pour déterminer les coordonnées du centre d'un cercle et la longueur de son rayon à partir de la forme générale de son équation :

1- Vérifiez d'abord que l'équation donnée est sous la forme générale où le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité

2- Les coordonnées du centre sont (-L , -k) c'est-à-dire $\left(\frac{-\text{coefficient de } x}{2}, \frac{-\text{coefficient de } y}{2}\right)$

3- La longueur du rayon du cercle est égale à r **où** $r = \sqrt{L^2 + k^2 - C}$, $L^2 + k^2 - C > 0$

Exemple

8 Lesquelles des équations suivantes sont des équations d'un cercle ? Si oui, trouver son centre et la longueur de son rayon

a $3x^2 + 2y^2 + 6x - 8y - 10 = 0$ **b** $x^2 + y^2 + 4x + 25 = 0$

c $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 30 = 0$ **d** $4x^2 + 4y^2 = 49$

e $x^2 + y^2 + 2xy + 3 = 0$

Solution

a Le coefficient de $x^2 \neq$ le coefficient de y^2 $\therefore$ Ce n'est pas l'équation d'un cercle

b Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité et l'équation n'admet pas un terme en xy

$L = \frac{4}{2} = 2$, $k = \frac{0}{2} = 0$, $C = 25$

$\therefore L^2 + k^2 - C = (2)^2 + (0)^2 - 25 < 0$

$\therefore$ Ce n'est pas l'équation d'un cercle

c En divisant les deux membres par 2 $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y - 15 = 0$

$\therefore$ Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité et l'équation n'admet pas un terme en xy

$L = -3$, $k = 2$, $C = -15$

$\therefore L^2 + k^2 - C = (-3)^2 + (2)^2 - (-15) = 28 > 0$

$\therefore$ C'est l'équation d'un cercle de centre (3 , -2) , $r = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ unités

d En divisant les deux membres par 4 $\therefore x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$

$\therefore$ Le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité et l'équation n'admet pas un terme en xy

$L = 0$, $k = 0$, $C = \frac{49}{4}$ $\therefore L^2 + k^2 - C = \frac{49}{4} > 0$

$\therefore$ C'est l'équation d'un cercle de centre le point d'origine et $r = \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{7}{2}$ unités

e $\because$ L'équation contient f unterme xy $\therefore$ ce n'est pas l'équation d'un cercle

Essayez de résoudre

9 Lequelle des équations suivantes représente l' équations d'un cercle ? Si c'est le cas, trouvez son centre et la longueur de son rayon.

a $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 17 = 0$ **b** $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

c $2x^2 + 2y^2 - 4x + 39 = 0$ **d** $x^2 + y^2 - 2xy - 6 = 0$

pensé critique : Les deux cercles $C_1 : x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 = 0$
$C_2 : x^2 + y^2 + 14x + 10y - 26 = 0$ sont-ils tangents extérieurement? Expliquez votre réponse.

Exemple

9 **En lien avec l'industrie :** La figure ci-contre montre une poulie A d'une machine, tangente aux deux axes du repère. Cette poulie tourne à l'aide d'une ceinture passant autour d'une petite poulie B d'équation de cercle :

$x^2 + y^2 + 14x + 45 = 0$. Trouvez :

a l'équation du cercle de la poulie A sachant que la longueur du rayon de son cercle est égale à 5unités

b la distance entre les centres des deux poulies si chaque unité dans le repère cartésien représente 6 cm.

Solution

a $\because$ La poulie A est tangente aux deux axes du repère et la longueur de son rayon est 5 unités.

$\therefore$ Le centre de son cercle est M(5 ; 5) $\quad \therefore L = -5 \;,\; k = -5$

$\because C = L^2 + k^2 - r^2 \qquad \therefore \; C = (-5)^2 + (-5)^2 - (5)^2 = 25$

L'équation de son cercle est : $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$

b $\because$ L'équation du cercle de la poulie B est : $x^2 + y^2 + 14x + 45 = 0$

$\therefore L = 7 \qquad k = 0 \qquad C = 45 \qquad r = \sqrt{49 - 45} = 2$

$\therefore$ le centre de son cercle est le point N (-7 ; 0) et la longueur de son rayon est égale à 2 unités

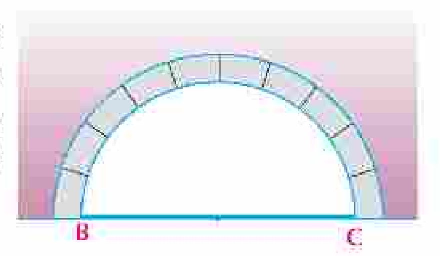
$\therefore$ La distance entre les centres des deux poulies est $= MN = \sqrt{(5+7)^2 + (5)^2} = 13$ unités

$\because$ Chaque unité dans le repère représente 6 cm

$\therefore$ La distance entre les centres des deux poulies $= 13 \times 6 = 78$ cm

Essayez de résoudre

10 **En lien avec le système routier :** La figure ci-contre montre une section verticale d'un tunnel circulaire d'équation de cercle : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, $\overline{AB}$ est un diamètre. Trouvez la hauteur maximale du tunnel si l'unité de longueur dans le repère cartésien représente 70 cm.



Exemple

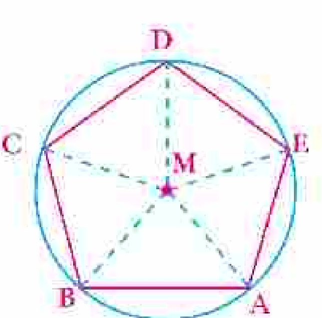
10 **En lien avec la géométrie :** Trouvez à un centimètre carré près l'aire de la surface d'un pentagone régulier dont le cercle circonscrit est d'équation : $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 5 = 0$ sachant que l'unité de longueur dans le repère cartésien représente 5 cm.

Solution

Soit M le centre du cercle circonscrit au pentagone régulier ABCDE. On a :

AB = BC = CD = DE = AE **(et elles sont des cordes du cercle)**

$\therefore$ m($\angle$AMB) = m($\angle$BMC) = ... = $\frac{360^\circ}{5}$ = 72°



On remarque que le pentagone ABCDE est partagé en 5 triangles superposables.

Donc l'aire du pentagone $= 5 \times$ aire du $\triangle$ MAB

$= 5 \times \frac{1}{2}$ MA $\times$ MB sin 72°

$= \frac{5}{2}$ r² sin 72° **(1)**



De l'équation du cercle : L = 3 k = -6 C = 5

$\because$ $r^2 = L^2 + k^2 - C$ $\therefore r^2 = 9 + 36 - 5 = 40$

En subistituant dans (1) sin 72° = 95.10565 unités carrées

$\therefore$ L'aire du pentagone régulier $= \frac{5}{2}(40)$

$\because$ Chaque unité de longueur dans le repère cartésien représente 5 cm.

$\therefore$ L'unité carrée dans le plan représente $= (5)^2 = 25$ cm²

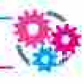
d'où L'aire du pentagone régulier = 95.10565 × 25 ≃ 2378 cm²



Rappel

L'aire d'un pentagone regulier $\frac{n}{2}$ r² sin $\frac{360}{n}$ où r est le rayon du cercle circoncrit au pentagone n est le mesure de sec côté.

Exercices (3 - 5)



Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. Le point (2 ; 0) appartient à :
   - **a** l'axe des abscisses
   - **b** l'axe des ordonnées
   - **c** la droite y= 2x
   - **d** le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$

2. Si A (3 ; -7) et B(–3 ; 5) , alors les coordonnées du milieu de $\overline{AB}$ sont ....
   - **a** (0 ; 1)
   - **b** (1 ; 0)
   - **c** (0 ; -1)
   - **d** (-1 ; 0)

3. La distance entre les deux points (2 ; 4) et (10 ; –2) est égale à .....
   - **a** 9
   - **b** 10
   - **c** $3\sqrt{10}$
   - **d** 6

4. Le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 25$ et du centre (0 ; 0) passe par le point ....
   - **a** (1 ; 4)
   - **b** (5 ; 0)
   - **c** (25 ; 0)
   - **d** (5 ; 1)

5. L'équation du cercle ayant pour centre (3 ; –5) et pour longueur de rayon 7 unités est :
   - **a** $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$
   - **b** $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$
   - **c** $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$
   - **d** $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 49$

(6) Le périmètre du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 8$ est :

a 8π b 64π c $2\sqrt{2}\,\pi$ d $4\sqrt{2}\,\pi$

(7) Ecrivez l'équation du cercle de centre M et de longueur de rayon r si :

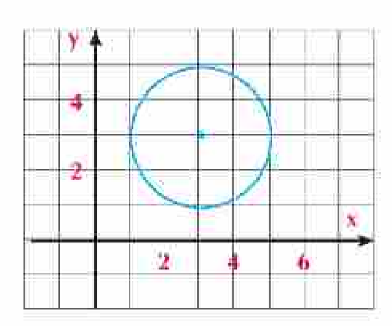
a $M(2\,;3)$, $r = 5$ b $M(0\,;\,0)$, $r = 4$

c $M(3\,;0)$, $r = 6$ d $M(4\,;\,-5)$, $r = \sqrt{7}$

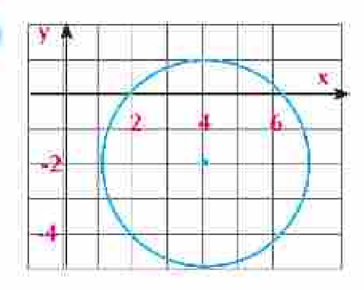
e $M(0\,;-1)$, $r = 2\sqrt{3}$ f $M(-4\,;\,-3)$, $r = \frac{3}{2}$

(8) Ecrivez l'équation du cercle représenté par chacune des figures suivantes :

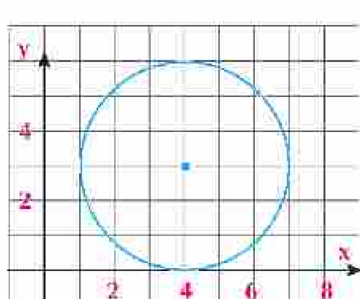




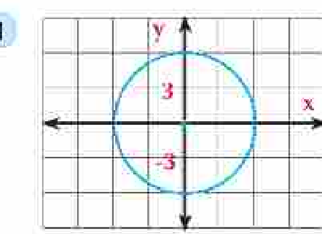
b



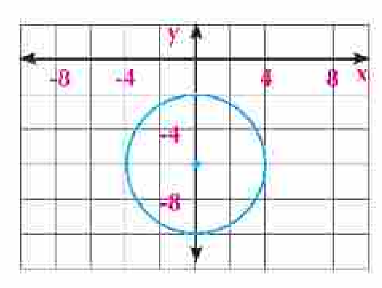
c



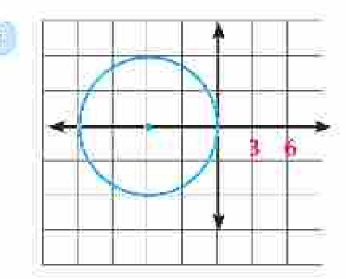
d



e



f



(9) Ecrivez l'équation du cercle si :

a le centre du cercle est le point M (7 ; -5), et le cercle passe par le point A(3 ; 2).

b $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle où A(6 ; –4) et B(0 ; 2).

c le centre du cercle est le point (5 ; –3) et le cercle est tangent à l'axe des abscisses.

(10) **Trouvez les coordonnées du centre et la longueur du rayon pour chacun des cercles suivants:**

a $x^2 + y^2 = 27$ b $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 49$

c $(x - 2)^2 + y^2 = 16$ d $x^2 + (y + 7)^2 = 24$

11 **Ecrivez la forme générale de l'équation du cercle dans chacun des cas suivants :**

a Le centre est M(3 ; 1) et la longueur du diamètre est égale à 8.

b Le centre est M(0 ; 0) et le cercle passe par le point (–1 ; 3) .

c Le centre est M(–5 ; 0) et le cercle passe par le point (3 ; 4) .

d $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle où A(3 ; –7) et B(5 ; 1) .

12 **Trouvez les coordonnées du centre et la longueur du rayon pour chacun des cercles suivants**

a $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$　　b $x^2 + y^2 + 2x = 8$

c $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$　　d $x^2 + y^2 - 8x = 12$

13 **Parmi les cercles suivants, trouvez les deux cercles superposables :**

a $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0$

b $x^2 + y^2 - 14x + 37 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x + 13 = 0$

14 **laquelle des équations suivantes représente un cercle ? Puis trouvez son centre et son rayon :**

a $x^2 + y^2 + 8x - 16y - 1 = 0$　　b $x^2 + 2y^2 + 6x - 5y = 0$

c $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + x - 8 = 0$　　d $x^2 + y^2 + 2xy - 12 = 0$

e $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 7 = 0$　　f $2x^2 + 2y^2 + 3y - 8 = 0$

15 **Navigation maritime :** Un radar situé au point A(7 ; –9) , couvre une zone circulaire de 30 unités de longueur de rayon. Ecrivez l'équation du cercle déterminant la zone contrôlée par le radar dans le repère cartésien. Le radar peut-il repérer un navire se trouvant au point B(25 ; –30) ? Expliquez votre réponse .

16 **Architecture :** Un architecte a réalisé un bâtiment sous forme d'un octogone régulier dont les sommets sont situés sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 12y - 60 = 0$. Calculer l'aire du bâtiment à une unité carrée près.

17 **Industrie :** La figure ci-contre montre deux engrenages d'une machine. Leurs centres sont situés sur une droite parallèle à l'axe des ordonnées. La distance maximale entre leurs extrémités est 10 unités. Trouverz l'équation du plus petit engrenage sachant que l'équation du plus grand engrenage est $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 32 = 0$.

y
10
x

18 **Réflexion créative :** Trouvez l'équation du cercle passant par les deux points A(1 ; 3) et B(2 ; – 4) sachant que son centre est situé sur l'axe des abscisses.

Résumé de l'unité

Notions et exiones

Une droite : par deux points de l'espace passe une seule droite.

Un plan : un surface n'est pas limité dont toute droite passant par deux de ses points est inclus complètement dans cette surface.

Un espace : un espace est un ensemble infini de points, il contient tous les figures, les plans, les solides qu'on étudie et quatre points distincts mon coplanaire.

Relation entre deux droites dans l'espace **1)** Sécantes : s'elles se coupent en un point **2)** parallèles : s'elles sont situés dans un même plan et elles ne se coupent pas.

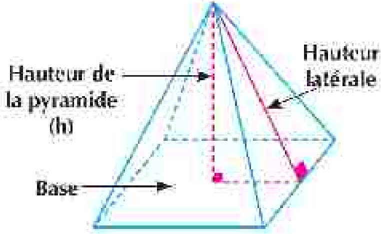
3) Mon caplanaire: ne sont pas setués dans un même plan (ne sont nireiants ni parallèles)

Relation entre une droite et un plan dans l'espace : **1)** La droite coupe le plan en un point. **2)** La droite est inclus dans le plan. **3)** la droite et le plan n'ont pas un point en commun et dans se cas ils sont parallèles. .

Relation entre deux plan dans l'espace : **1)** se coupent en une droite. **2)** les deux plans sont parallèles. **3)** Les deux plans sont confondus.

Un patron est une figure à deux dimensions qu'on peut plier pour former une figure à trois dimensions.

Une pyramide est un solide qui a pour base un polygone quelconque et pour faces latérales des triangles ayant un sommet commun



Une pyramide régulière : est une pyramide dont la base est un polygone régulier dont le centre est le pied de la hauteur abaissée du sommet de la pyramide sur cette base. Dans une pyramide régulière, on a :



- Les arêtes latérales sont de même longueur.
- Les faces latérales sont des triangles isocèles superposables.
- Les hauteurs latérales sont de mêmes longueurs.

Une pyramide droite : Une pyramide est dite chaile si et seulement si la perpendiculaire abaissée de son sommet à ra bas passe par le centre de la base

Un cône droit: est un solide engendré par la rotation d'un triangle rectangle d'un tour complet autour de l'un des côtés de l'angle droit.

Aire latérale d'une pyramide $= \frac{1}{2}$ périmètre de su base ×sa hauteur latérale.

L'aire totale d'une pyramide = Son aire latérale + L'aire de sa base.

L'aire latérale d'un cône droit $= \pi \ell r$ où ℓ est la longueur de sa génératrice et r est la longueur du rayon du cercle de la base.

L'aire totale d'un cône droit $= \pi \ell r + \pi r^2 = \pi r(\ell + r)$

Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Le volume d'un cône : est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Le cercle: est un ensemble de points du plan qui se trouvent à une distance donnée d'un point fixe dans le plan.

Equation d'un cercle: L'équation d'un cercle de centre (d ; e) et de longueur de rayon r est: $(x - d)^2 + (y - h)^2 = r^2$

Equation générale d'un cercle L'équation générale d'un cercle de centre $(-L ; -K)$ et de longueur de rayon r est : $x^2 + y^2 + 2Lx + 2Ky + C = 0$, où $r = \sqrt{L^2 + K^2 - C}$, $L^2 + K^2 - C > 0$

Pour déterminer les coordonnées du centre d'un cercle et la longueur de son rayon à partir de la forme générale de son équation :

- Vérifier d'abord que l'équation donnée est sous la forme générale où le coefficient de x^2 = le coefficient de y^2 = l'unité.
- Les coordonnées du centre sont $(-L ; -K)$ c'est-à-dire $\left(\frac{-\text{coefficient of } x}{2} ; \frac{-\text{coefficient of } y}{2}\right)$
- La longueur du rayon du cercle est égale à r où $r = \sqrt{L^2 + K^2 - C}$, where $L^2 + K^2 - C > 0$



Exercices généraux

Complétez ce qui suit :

1. Une droite est bien déterminée en connaissant .... sur cette droite
2. Deux droites non coplanaires ne peuvent pas inclus dans ....
3. Deux plans sont confondus s'ils ont .... en commun
4. Les faces latérales d'une pyramide régulière sont ....
5. Les hauteurs latérales d'une pyramide régulière sont ....
6. La hauteur d'un cône droit est .... la longueur de sa génératrice.
7. Le volume d'une pyramide = ... × ....
8. La longueur du rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 18 = 0$ est égale à ....
9. L'équation du cercle de centre (2 ; 3) et de longueur de rayon 4 unités est ....

A l'aide de la figure ci-contre, choisir la bonne réponse parmi les réponses proposées :



10. les deux droites non coplanaires ne sont :



   a) pas sécantes
   b) pas perpendiculaires
   c) pas parallèles
   d) ni sécantes ni parallèles

11. L'aire latérale du cône droit est égale à .... cm^2

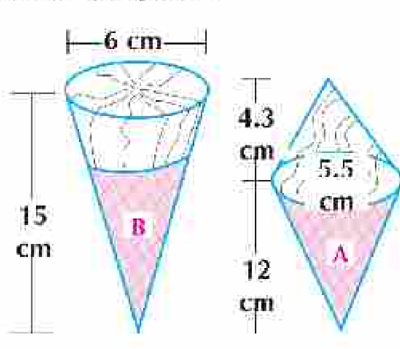


   a) 60
   b) 60π
   c) 48
   d) 48π

12. L'aire totale d'une pyramide régulière est égale à .... cm^2
   a) $360\ cm^2$ b) $240\ cm^2$ c) $384\ cm^2$ d) $432\ cm^2$
13. Le volume de la pyramide est égal à .... cm^3
   a) 64 b) 96 c) 480 d) 384
14. Le rapport entre le volume de la pyramide et le volume du cône est égal à :
   a) $\pi : 3$ b) $4 : \pi$ c) $\pi : 4$ d) $3 : \pi$

Réponds aux questions suivantes :

15. Une pyramide régulière a pour volume $12\ cm^3$ et l'aire de sa base est $4\ cm^2$. Calculer sa hauteur.
16. Une pyramide régulière à base quadrilatère a pour volume $400\ cm^3$ et pour hauteur 12 cm. Calculer son aire latérale.
17. Un cône circulaire droit 96π. Trouve la longueur du rayon de sa base sachant que sa hauteur est 8 cm.
18. Trouver à une décimale près l'aire totale d'un cône droit de longueur de diamètre de la base 10 cm et de hauteur 12 cm.
19. La based une pyramide droite est un losange dont les longueurs de diagonales sont 12 cm, 8 cm et sa hauteur est 10 cm. Trouve son volume.
20. **Ecrivez l'équation du cercle si :**
   a) Le centre est M(3 ; 5) et la longueur du rayon est égale à 4 unités .
   b) Le centre est M(-2 ; 0) et la longueur d'un diamètre est égale à 9 unités.
   c) Le centre est M(0 ; 9) et le cercle passe par le point (4 ; 6).
   d) $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle où A(5 ; –2) et B(1 ; 10).
21. Ecrivez l'équation générale du cercle de centre (5 ; –12) et passant par le point d'origine.
22. Trouver les coordonnées du centre et la longueur du rayon pour chacun des cercles suivants:
   a) $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 27$ b) $(x + 4)^2 + y^2 = 9$
   c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ c) $2x^2 + 2y^2 - 10y - 7 = 0$
23. **Planification urbaine :** Sur le plan d'une ville tracé dans un repère cartésien, chaque unité représente 5 mètres. Dans ce plan, on a trouvé que le cercle: $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 11 = 0$ délimite l'une des ses places. Trouver à un mètre près l'aire de cette place..
24. **Industrie:** Les lignes de production d'une usine produisent deux sortes de crème glacée A et B comme le montre la figure ci-contre. Laquelle des deux sortes a le plus grand volume ? Est-ce que le volume du modèle A change en changeant les hauteurs des deux cônes qui le constituent sachant que la somme des deux hauteurs reste inchangée ? Expliquez votre réponse.



(25) **Tourisme:** La France s'intéresse à l'archéologie égyptienne. Elle a transporté certains monuments à Paris pour les exposer dans ses musées. Elle a construit une pyramide en verre comme l'entrée principale du musée du Louvre. Cette pyramide est semblable à la grande pyramide de Gizeh. Sachant que la hauteur de la pyramide du Louver est 21,6 mètres et la longueur de sa base est 35 mètres, calculer, à un mètre carré près, l'aire du verre utilisé pour sa construction.



Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées :

(1) Les cas suivants déterminent un plan sauf :

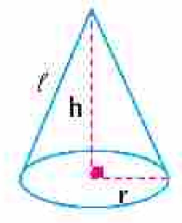
a) une droite et un point n'appartient pas à cette droite

b) deux droites parallèles et non confondues

c) deux droites sécantes.

d) deux droite non coplanaires

(2) L'aire totale d'un cône droit est égale à :



a) $\pi r \ell$ b) $\frac{\pi}{3} r^2 h$

c) $\pi r (r + \ell)$ d) $\frac{\pi}{3} r (rh + 3\ell)$

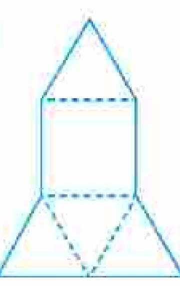
(3) Soit une pyramide régulière droite à base quadrilatère de périmètre 36 cm et de hauteur 10 cm. Sonvolume est égal à :............... cm^2

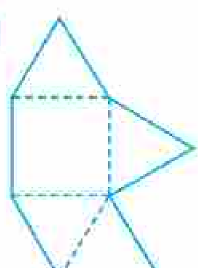
a) 810 b) 180 c) 360 d) 270

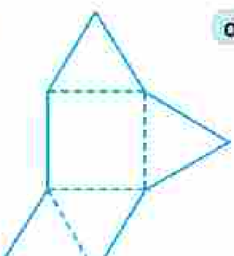
(4) Le cercle d'équation : $(x + 2)^2 + y^2 + 2y = 0$ a pour centre :

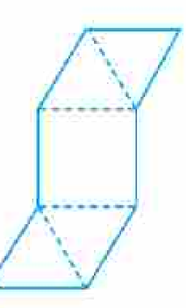
a) (2 ; 2) b) (-2 ; -1) c) (2 ; -1) d) (-4 ; 2)

(5) Lequel des patrons suivants peut être utilisé pour former une pyramide régulière à base quadrilatère?

a) 

b) 

c) 

d) 

Questions à réponses courtes :

(6) Combien de droites peut – on tracer dans chacun des cas suivants :

a) Deux points distincts b) trois points non alignés

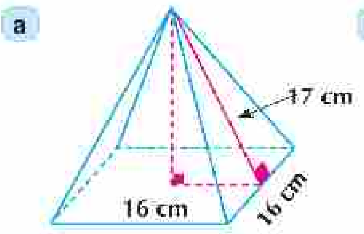
c) deux plans sécants.

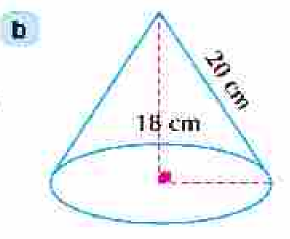
d) quatre points dans l'espace de sorte que chaque trois non alignés.

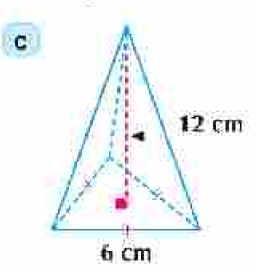
7) citez le nombre de plans qui passe par :

a Un point   b deux points   c trois points non alignés

8) Calculez le volume de chacun des solides suivants à un centimètre cube près..

a 

b 

c 

9) Trouver l'équation du cercle de centre (2 ; 7) qui passe par le point (1 ; 3).

10) Parmi les cercles suivants, lesquels sont superposables ? Justifiez la réponse.

a $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$

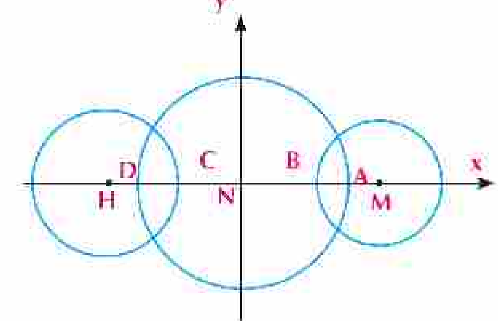
b $x^2 + y^2 - 4x + 8y = 0$, $x^2 + y^2 + 12y + 16 = 0$

Questions à réponses longues :

11) Calculez à un dixième près le volume d'une pyramide régulière à base pentagone de longueur de côté de base 16 cm et de hauteur 12 cm

12) Soit MAB un secteur circulaire de longueur de rayon de cercle 18 cm et d'angle au centre de mesure 60°. On le plie et on colle ses deux rayons pour former la plus grande aire latérale d'un cône droit. Troucez le volume de ce cône

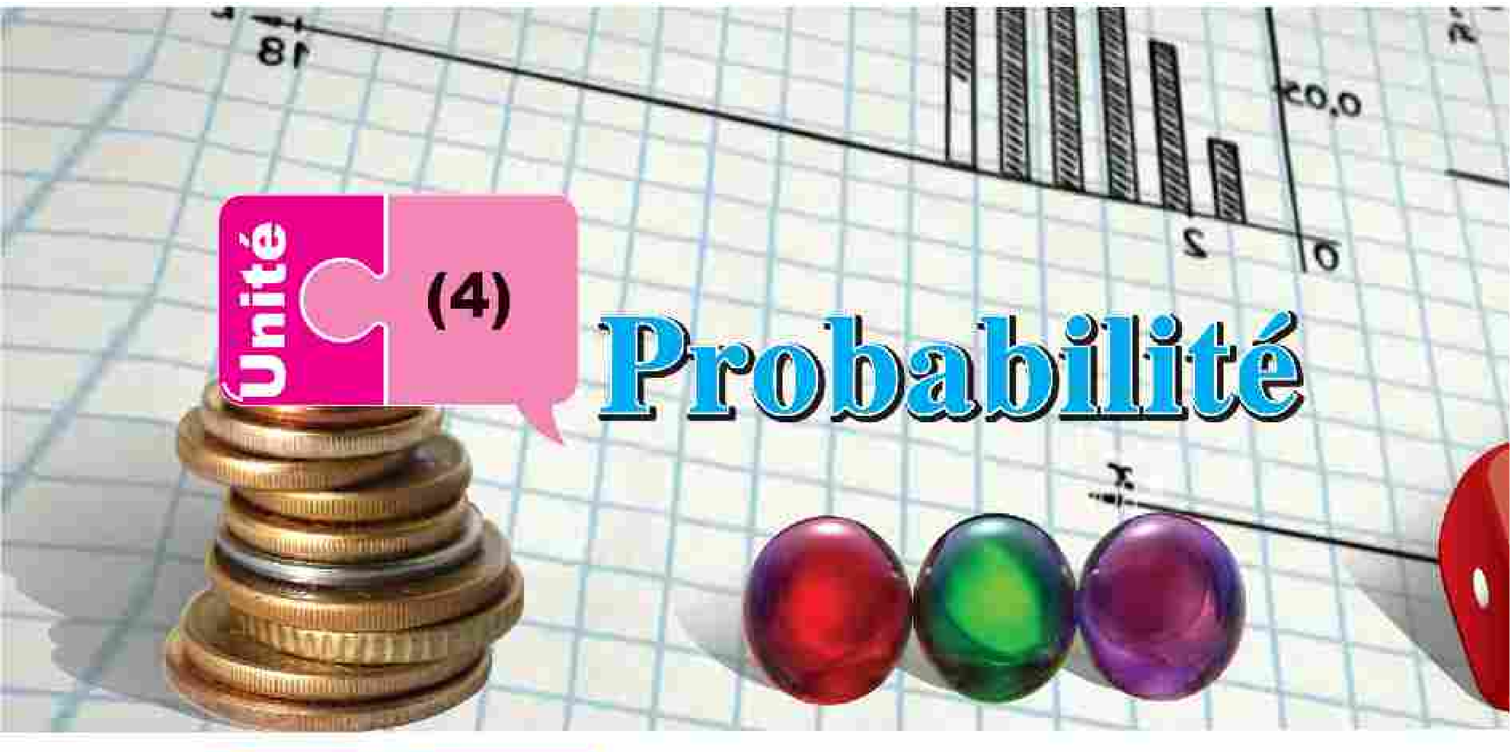
13) Dans la figure ci-contre, les points M , N et Z sont situés sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé et N est le point d'origine. Si les points M , N et Z sont les centres de trois cercles de longueurs de rayons 5 , 9 et 6 unités respectivement et si CD = 2 MA = 4 unités, trouvez la forme générale de l'équation de chacun des trois cercles.



14) Un pilote repère dans un moment deux vallées sécants en un point. Une route surmonte les deux vallées mais elle ne passe pas par le point d'intersection. Représentez cette situation par un dessin. Puis déterminez le nombre de plans.

Avez-vous besoin d'une aide supplémentaire :

Si vous ne pouvez pas résoudre le problème N°.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Voir	3 -2	3 - 3	3 - 4	3 -1	3 - 3	3 - 4	3 - 4	3- 3	Compétences générales	3 - 4



Introduction de l'unité

Les racines de la science de la probabilité s'étendent à la renaissance dans les études des astrologues et les jeux de loteries qui ont impliqué à l'étude de l'apparition de certains éléments parmi un grand nombre d'éléments. Des autres recherches sur cette science ont menées par Girolamo Cardan en seizième siècle et développées par Pierre de Fermat et Blaise Pascal en dix-huitième siècle.

En dix-neuvième siècle au cours de l'évolution de la science de probabilité, des multiples de définitions ont apparu, parmi lesquelles ceux qui sont simples, peuvent être acquises à partir d'une perception concrète et ceux qui ont besoin de recourir à l'expérimentation pour examiner le nombre d'occurrence d'un élément parmi plusieurs en répétant l'expérience plusieurs fois sous certains contraints. La probabilité est la mesure de la possibilité de l'occurrence d'un événement.

En dix-neuvième siècle, Laplace l'un des fondateurs de cette science découdra la théorie de la probabilité, par ailleurs Adolph Quételet présenta le premier œuvre statistique d'une manière scientifique en 1853. A partir de cette datte, la statistique et probabilité est devenue une science utile dans les différents domaines également dans les recherches scientifiques, elle devenue la science de prévision des questions de l'avenir. Dans cette unité, nous allons aborder quelques notions et définitions de base de la probabilité et de son calcul

Compétences attendues de l'unité

Après l'étude de l'unité, il est prévu que l'élève soit capable de :

- Reconnaitre la notion expérience aléatoire
- Reconnaitre la notion univers des éventualités
- Ecrire l'univers des éventualités de quelques expériences aléatoires
- Reconnaitre la notion événement: élémentaire certain - impossible.
- Découvrir les opérations Reconnaitre la notion événements incompatibles.
- Reconnaitre les opérations sur les événements comme (union – intersection – différence – complémentaire)
- Reconnaitre la notion probabilité.
- Utiliser les axiomes de probabilités pour calculer la probabilité de la réalisation d'un événement.
- Résoudre des applications mathématiques en utilisant les axiomes de probabilité statistiques et des probabilités
- Résoudre des problèmes dans la vie quotidienne en utilisant les lois de probabilités.



Vocabulaires de base

- Statistiques
- Probabilité
- Expérience aléatoire
- Univers des éventualités
- Pièce de monnaie
- Dé
- Evénement
- Evénement élémentaire
- Evénement composé
- Evénement certain
- Evénement impossible
- Opérations sur les événements
- Evénements incompatibles



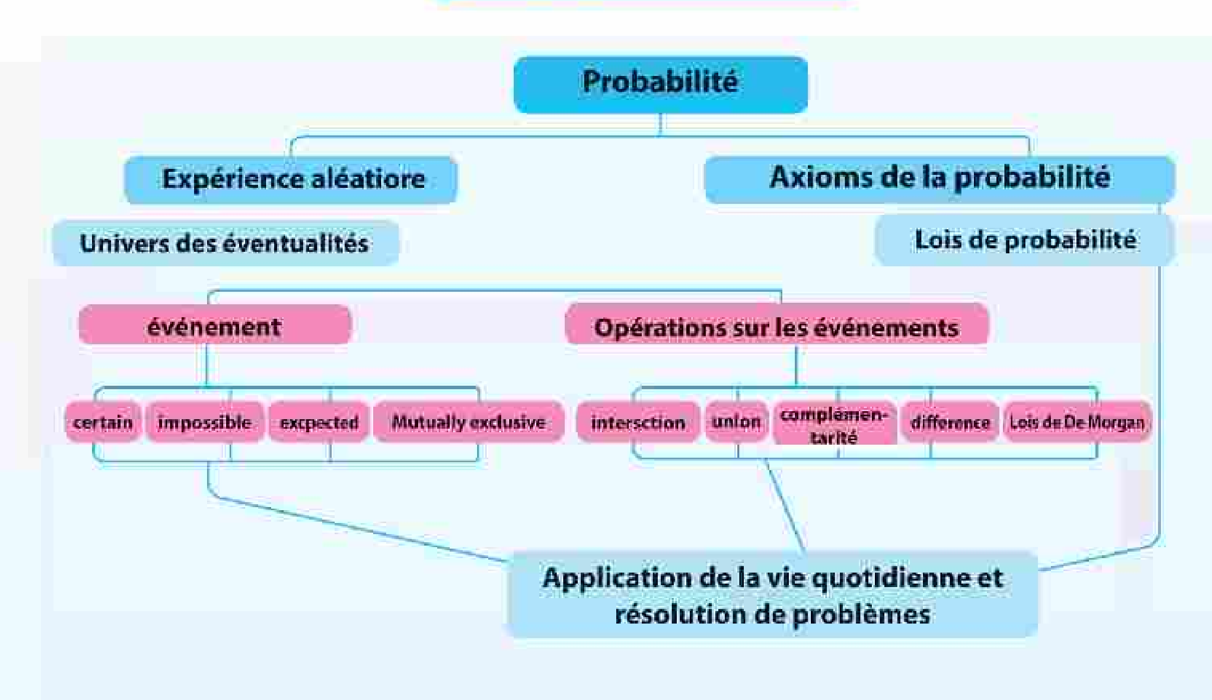




Aides pédagogiques

- Calculatrice Scientifique
- Calcul de probabilité
- Logiciel de graphisme





4 - 1 Calcul de probabilité

Allez apprendre

- Notion d'expérience aléatoire et d'univers des éventualités
- Notion d'événement – événement élémentaire – événement certain – événement impossible
- Reconnaître les opérations sur les événements comme (union - intersection - différence - complémentaire)
- Événements incompatibles
- Lois de De Morgan
- Notion de probabilité.
- Calcul de probabilité.
- Axiomes de probabilités et applications quotidiennes

Vocabulaires de base

- Expérience aléatoire
- Univers des éventualités
- Événement
- Événement élémentaire
- Événement certain
- Événement impossible
- Événements incompatibles.
- Probabilité
- Axiomes de probabilité

Aides pédagogiques

- Calculatrice.

Préface:

On a déjà étudié les notions de bases simplifiées des probabilités, dans cette leçon nous allons continuer à développer les études de ces notions et les opérations sur les événements pour calculer la probabilité de la réalisation d'un événement à partir des exemples variés de la vie quotidienne.

Vocabulaires de base



Apprendre

Expérience aléatoire: C'est une expérience dont on peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir, laquelle de ces issues sera réalisée.

Exemple

1) Laquelle des expériences suivantes est une expérience aléatoire ?

a) On lance un dé non pipé et on observe le nombre apparu sur la face supérieure.

b) On observe la couleur d'une boule tirée au hasard d'un sac contenant des boules colorées.

c) On jette une pièce de monnaie et on note le résultat apparu sur la face supérieure.

d) On observe la couleur d'une boule tirée au hasard d'un sac contenant des boules identiques colorées : la première est blanche, la deuxième est noire, la troisième est rouge et la quatrième est verte.

Solution

Les expériences (a),(c),(d) sont des expériences aléatoires car on peut déterminer à l'avance tous les résultats possibles mais on ne peut pas déterminer le résultat exact avant la réalisation de l'expérience.
L'expérience (b) n'est pas aléatoire car on ne peut pas déterminer à l'avance les résultats de cette expérience avant sa réalisation.

Essaie de résoudre

1) Laquelle des expériences suivantes est aléatoire ?

a) On jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat apparu sur la face supérieure.

b On observe le nombre inscrit sur une carte tirée au hasard d'un sac contenant des cartes numérotées (sans savoir ses nombres) .

c On observe le nombre inscrit sur une carte tirée au hasard d'un sac contenant 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20 .



A apprendre



Univers des éventualités (Univers des issues)

- L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience et on le note U.

Remarque :
- Le nombre d'éléments de l'univers des éventualités est noté card(U).
- L'univers des éventualités est fini si le nombre de ses éléments est limité et il est infini si le nombre de ses éléments est illimité. Dans la suite, nous allons étudier les univers des éventualités finis.

Expériences aléatoires usuelles :

Jeter une pièce de monnaie

1- Si on jette une pièce de monnaie une fois et on observe le résultat apparu sur la face supérieure : U = { F ; P}

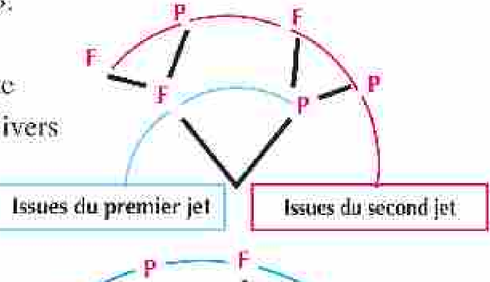
Où : F symbolise « face » et P symbolise « pile ».

On a card(U) = 2

2- Si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on observe la succession des faces et des piles, l'univers des éventualités de cette expérience est :

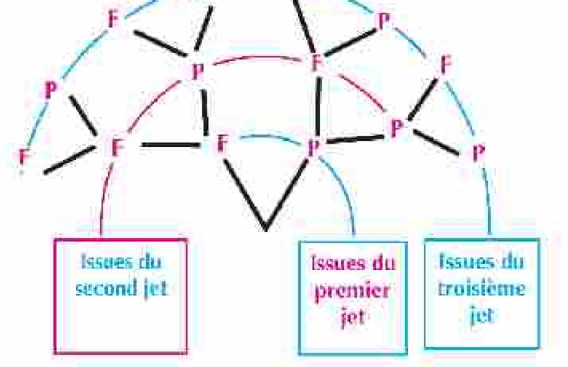
U = { (F ; F) ; (F ; P) ; (P ; F) ; (P ; P)}

On a card (U) $= 2 \times 2 = 4 = 2^2$



3- Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suite et on observe la succession des faces et des piles, on peut obtenir l'univers des éventualités de cette expérience de l'arbre ci-contre:

U = { {(F ; F ; F) ; (F ; F ; P) ,
(F ; P ; F) ; (F ; P ; P) ,
(P ; F ; F) ; (P ; F ; P) ,
(P ; P ; F) ; (P ; P ; P) }



On a card (U) $= 2 \times 2 \times 2 = 8 = 2^3$

On remarque que :

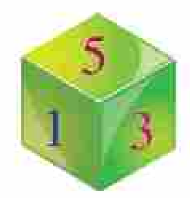
1- Si on jette une pièce de monnaie m fois de suite, on a card (U) $= 2^m$

2- (F ; P) ≠ (P ; F) pourquoi?

3- Si on jette simultanément, deux pièces de monnaie, distinctes (en forme et en volume)l'univers des éventualités de cette expérience est le même que quand on jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Dans ce cas, chaque résultat sera sous la forme d'un couple (face de la première pièce ; face de la seconde pièce).




Lancer un dé



1- Si on lance un dé une fois et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, l'univers des éventualités de cette expérience est :

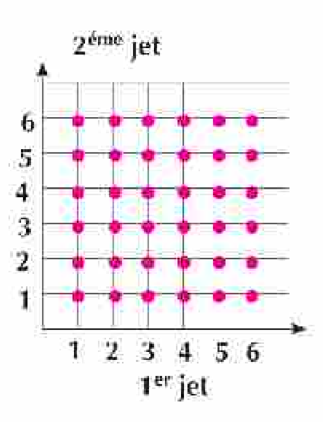
$U = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ On a $card(U) = 6$

2- Si on lance un dé deux fois de suite et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, l'univers des éventualités de cette expérience est l'ensemble des couples ayant pour premier élément le résultat du premier jet et pour second élément le résultat du deuxième jet d'où : $U = \{ (x ; y) : x \in \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ et $y \in \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}\}$ Les figures suivantes illustrent le résultat.

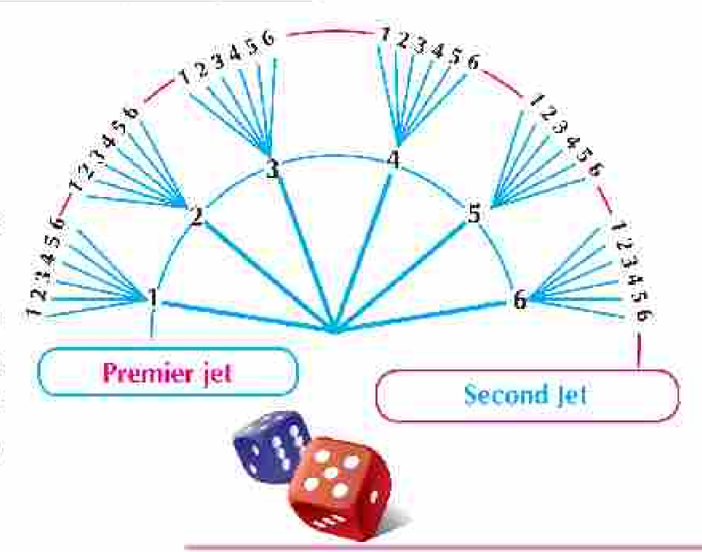
a Forme du tableau :

Jet premier / Deuxième	1	2	3	4	5	6
1	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1; 6)
2	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ; 6)
3	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
4	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
6	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

b Forme géométrique :



c L'arbre graphique



On remarque que :

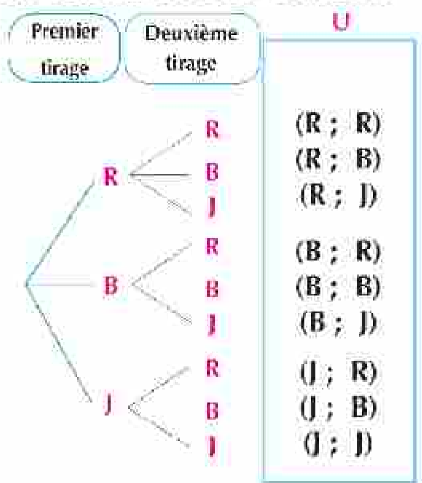
1- $card (U) = 6 \times 6 = 36 = 6^2$

2- $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\} \times \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

3- Si on lance deux dés simultanément une fois, l'univers des éventualités de cette expérience est le même que quand on lance un seul dé deux fois de suit.

Exemple

2 Un sac contient trois boules identiques de couleurs différentes. La première est rouge, la seconde est blanche et la troisième est jaune. On tire au hasard deux boules l'une après l'autre avec remise et on observe la succession des couleurs. Écrivez l'univers des éventualités.



Solution

On note la boule rouge par le symbole R, la boule blanche par le symbole B et la boule jaune par le symbole J:

Lors d'un tirage la remise d'une boule tirée permet de la retirer dans le tirage suivant. La figure suivante montre l'arbre de l'univers des éventualités où carde (U) = $3^2 = 9$

U = {(R ; R), (R ; B), (R : J), (B : R), (B : B), (B : J), (J ; R), (J ; B), (J ; J)}



Si on tire une boule sans remise c-à-d ne remet pas la boule dans le sac après son tirage.
Donce il n'y aura pas de possibilité d'apparaître dans le deuxième tirage.

Essayez de résoudre

2 Une boîte contient trois boules identiques numérotées de 1 à 3. On tire deux boules l'une après l'autre avec remise et on observe le numéro de la boule tirée. Écrivez l'univers des éventualités de cette expérience et le nombre de ses éléments.



A apprendre



définition

L'événement

- L'événement est un sous ensemble de l'univers des éventualités.

L'événement élémentaire (simple)

- C'est un sous-ensemble de l'univers des éventualités qui contient un seul élément.

définition

L'événement certain

C'est l'événement dont les éléments sont les mêmes que ceux de l'univers des éventualités U.

L'événement impossible

C'est l'événement qui ne contient aucun élément. Il est noté ϕ. C'est un événement qui ne se réalise jamais.

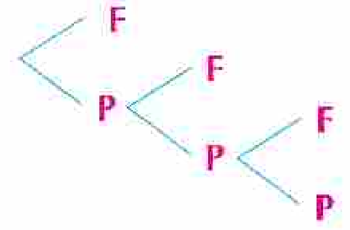
Exemple

(3) On jette une pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'on obtienne face une fois et pile 3 fois. Ecrivez l'univers des éventualités puis déterminez les événements suivants:-

A «obtenir face une fois au plus» C «obtenir pile deux fois au moins»

B «obtenir face une fois au moins» D «obtenir face deux fois au moins»

Solution



D'aprés l'arbre, on trouve

U = {F , (P ; F), (P ; P ; F),(P ; P ; P)}

A = {F ; (P ; F), (P ; P , F), (P ; P ; P)} = U

B = {F ; (P ; F), (P ; P; F)}

C = {(P ; P ; F) , (P ; P ; P)}

D = { } = ϕ événement impossible.

 **Essayez de résoudre**

(3) On jette une pièce de monnaie plusieurs fois jusqu'on obtienne deux faces ou deux piles une fois et pile 3 fois. Ecrivez l'univers des éventualités puis déterminez les événements suivants :

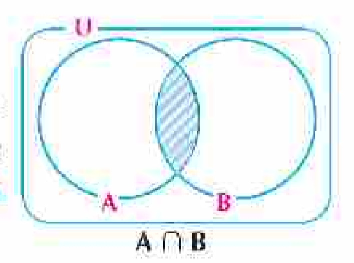
A «obtenir face une fois au moins» B «obtenir pile deux fois au plus»

C «obtenir pile une fois au plus»

Opérations sur les événements.

A apprendre

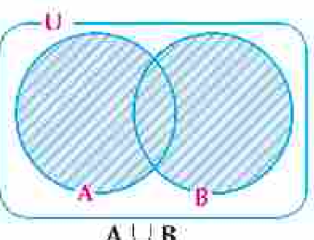
(1) L'intersection



A ∩ B

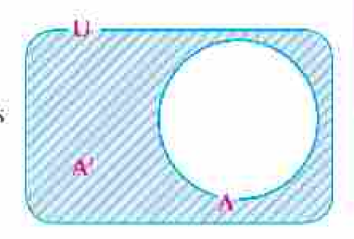
L'intersection des deux événements A et B est l'événement $A \cap B$ qui contient les éléments de l'univers des éventualités appartenant à A et B à la fois. Cela signifie la réalisation de A et B (**réalisation des deux événements à la fois**).

(2) L'union



A ∪ B

L'union des deux ensembles A et B est l'événement $A \cup B$ qui contient les éléments de l'univers des éventualités appartenant à A ou B ou les deux à la fois. Cela signifie la réalisation de A ou B (**réalisation de l'un des deux au moins**) .

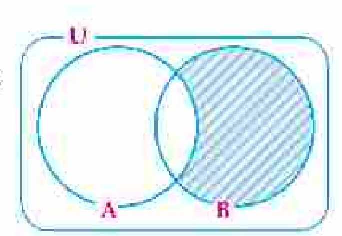


(3) La complémentarité

L'événement A' : est appelé le complément de l'événement A.

L'événement A : contient tous les éléments de l'univers des éventualités n'appartenant pas à l'événement A. Cela signifie la non réalisation de l'événement A.

Remarque que : $A \cup A' = U$, $A \cap A' = \phi$

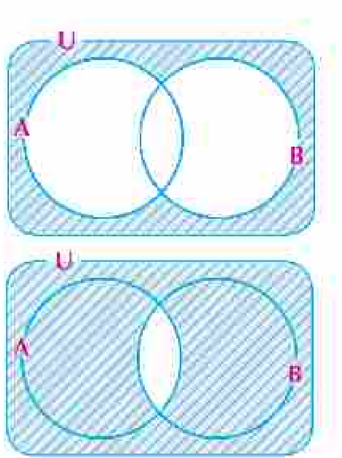


(4) La différence

L'événement $A - B$ contient tous les éléments de l'univers des éventualités U appartenant à A et n'appartenant pas à B. Ce sont les mêmes éléments que $A \cap B'$

Cela signifie la réalisation **de A et la non réalisation de B (réalisation de A seulement).**

$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$



(5) Lois de De Morgan

Si A et B sont deux événements de U, alors :

(1) $A' \cap B' = (A \cup B)'$

Cela signifie la non réalisation de l'un des deux événements)
ou (la non réalisation de A et la non réalisation de B)

(2) $A' \cup B' = (A \cap B)'$

Cela signifie la non réalisation des deux événements à la fois
ou (la réalisation de l'un des deux événements au plus)



A apprendre

Evénements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont incompatibles si la réalisation de l'un d'eux implique la non réalisation de l'antre.

Par exemple : **1-** Si A l'événement « réussir dans un examen » et B l'événement « échouer au même examen », alors la réalisation de l'un des deux événements implique la non réalisation de l'autre.

2- Si on lance un dé une fois et on observe le nombre inscrit sur la face supérieure, alors $U = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

Si A est l'événement « obtenir un nombre impair » donc $A = \{1 ; 3 ; 5\}$

B est l'événement « obtenir un nombre pair » donc $B = \{2 ; 4 ; 6\}$

Alors $A \cap B = \phi$ donc la réalisation de l'un des deux événements implique la non réalisation de l'autre.



definition

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \phi$
- On dit que plusieurs événements sont incompatibles si et seulement s'ils sont incompatibles deux à deux.

Remarquez que :

1- Si $A \cap B = \phi$, alors A et B sont incompatibles .
Si A ; B et C sont trois événements de U et si : $A \cap B = \phi$, $B \cap C = \phi$, $A \cap C = \phi$ alors A , B et C sont des événements incompatibles et réciproquement.

2- Les événements élémentaires dans une expérience aléatoire sont incompatibles.

3- Un événement A et son complémentaire A` sont incompatibles.

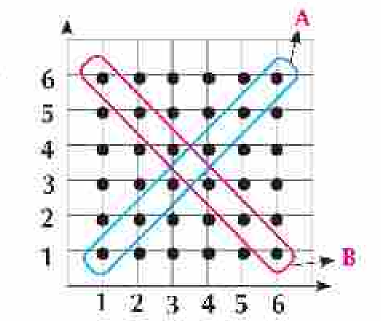
Exemple

4 On lance deux dés distincts et on observe les nombres inscrits sur les deux faces supérieures.

a Représentez l'univers des éventualités géométriquement puis écrivez chacun des deux événements suivants :
L'événement A « obtenir le même nombre sur les deux faces »
L'événement B « obtenir deux nombres dont la somme est égale à 7 »

b Les deux événements A et B sont-ils incompatibles ? Expliquez votre répons

Solution



a Les éléments de l'univers des éventualités de cette expérience sont des couples dont le nombre $= 6^2 = 36$
La figure ci-contre est la représentation géométrique de l'univers des éventualités où chacun de ses éléments représente un point comme le montre la figure

$A = \{(1 ; 1), (2 ; 2), (3 ; 3), (4 ; 4) , (5 ; 5) , (6 ; 6) \}$

$B = \{ (6 ; 1) , (5 ; 2), (4 ; 3) , (3 ; 4) , (2 ; 5) , (1 ; 6) \}$

b $\because A \cap B = \phi$ $\therefore$ A et B sont deux événements incompatibles

Essayez de résoudre

4 Dans l'exemple précédant, écrivez les deux événements suivants :
l'événement C « obtenir deux nombres dont la somme est 5 »
l'événement D « obtenir deux nombres l'un est le double de l'autre »
C et D sont-ils incompatibles ? Expliquez votre répons.

Probabilité



A apprendre

Calcul de probabilité :

Si tous les résultats de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire (les événements élémentaires) ont la même possibilité , alors la probabilité de la réalisation d'un événement . $A \subset U$, (notée) P(A) où :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(U)} = \frac{\text{nombre des resultas de l'evenement A}}{\text{nombre des resultats de U}}$$

Exemple

5 Une boîte contient 10 boules identiques, 5 blanches, 2 rouges et les autres vertes. On tire au hasard une boule, calculez la probabilité des événements suivants :

L'événement A « la boule tirée est rouge »

L'événement B « la boule tirée est rouge ou verte »

L'événement C « la boule tirée ne est pas verte »



Solution

La probabilité que la boule tirée soit rouge = $P(A) = \frac{card(A)}{card(U)} = \frac{\text{nombre des boules rouges}}{\text{nombre total des boules}} = \frac{2}{10} = 0.2$

La probabilité que la boule tirée soit rouge ou verte $= \frac{\text{nombre des boules rouges+nombre des boules vertes}}{\text{nombre total des boules}}$

$= \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$

La probabilité que la boule tirée ne soit pas verte = P(C)

= La probabilité que la boule tirée soit rouge ou blanche $= \frac{2+5}{10} = 0.7$

Réfléchissez : Peut-on trouver P (C) d'une autre méthode ? Expliquez.

Essayez de résoudre

5 Dans l'exemple précédant, calculez la probabilité des événements suivants :

L'événement D « la boule tirée soit rouge ou blanche »

L'événement E « la boule tirée soit rouge , blanche ou verte »

Á apprendre

Axiomes de la probabilité

1- Pour tout $A \subset U$ il existe un nombre réel appelé la probabilité de l'événement A et noté P(A) tel que : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

2- $P(U) = 1$

3- Si $A \subset U$, $B \subset U$ et si A et B sont deux événements incompatibles, Alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

D'après les axiomes précédents, on remarque que :

Le premier axiome signifie que la probabilité de la réalisation d'un événement est un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1]

Le deuxième axiome signifie que la probabilité de la réalisation de l'événement certain = 1

On peut généraliser **le troisième axiome** pour un nombre fini d'événements incompatibles.

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n)$

où $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ sont des événements incompatibles deux à deux.

Résultats importants

(1) $P(\phi) = 0$

(2) $P(A') = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(4) $P(A \cup B) = P(A) \quad P(B) - P(A \cap B)$



Si $A \subset B$
alors $P(A) \leqslant P(B)$

Exemple

6 A et B sont deux événements d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où :

$P(A) = \frac{3}{8}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calculez :

a $P(A \cup B)$ **b** $P(A')$ **c** $P(A - B)$ **d** $P(A' \cap B')$

Solution

a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

b $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

c $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

d $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

Essayez de résoudre

6 Dans l'exemple précédent, calculez les probabilités suivantes :

a $P(B')$ **b** $P(B - A)$ **c** $P(A' \cup B')$

Exemple

7 A et B sont deux événements d'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où $P(A) = \frac{5}{8}$,

$P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(A - B) = \frac{3}{8}$ calculez :

a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A' \cap B')$ **d** $P(A' \cup B)$

Solution

a $P(A \cap B) = P(A) - P(A - B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$

c $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$

d $P(A' \cup B) = P(A \cap B')' = 1 - P(A \cap B') = 1 - P(A - B)$

$= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

Réfléchissez : Peut-on trouver $P(A' \cup B)$ d'une autre méthode ?

Essayez de résoudre

7) Dans l'exemple précédent, trouve :

a $P(A')$ b $P(A' \cup B')$ c $P(B \cap A')$

Exemple

8) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A') = \frac{1}{3}P(A)$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$ trouvez :

a L'événement A « la réalisation de l'un des événements au moins »

b L'événement B « la réalisation de l'un des événements au plus »

c L'événement C « la réalisation de B seulement »

d L'événement D « la réalisation de l'un des événements seulement »

Solution

$\because P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$ $\therefore P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ $\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{8}$

$\because P(A') = \frac{1}{3}P(A)$ $\therefore 1 - P(A) = \frac{1}{3}P(A)$ $\therefore \frac{4}{3}P(A) = 1$ $\therefore P(A) = \frac{3}{4}$

a L'événement A « la réalisation de l'un des événements au moins » $= P(A \cup B)$
$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

b L'événement B « la réalisation de l'un des événements au plus » $= P(A \cap B)'$
$= P(A' \cup B') = \frac{5}{8}$

c L'événement C « la réalisation de B seulement » $= P(B - A)$
$= P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$

d L'événement D « la réalisation de l'un des événements seulement »
$= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$

Réfléchissez : Peut-on trouver la probabilité de la réalisation de l'un des événements seulement d'une autre méthode?

Essayez de résoudre

8) A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$, $P(A \cup B)' = 0{,}1$. Trouvez la probabilité des événements:

a L'événement A « la réalisation de l'un des deux événements au moins »

b L'événement B « la réalisation de A seulement »

c L'événement C « la réalisation de l'un des événements seulement »

d L'événement D « la réalisation de l'un des deux événements au plus »

Exemple

9) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P la fonction de probabilité définie sur U où:
$P(B) = 3\,P(A)$, $P(A \cup B) = 0.72$, trouvez : $P(A)$, $P(B)$ dans chacun des cas suivants:

1) Si A et B sont deux événements incompatibles. 2) Si $A \subset B$

Solution

Soit $P(A) = x$ $\therefore P(B) = 3x$



1) $\because$ A et B sont deux événements incompatibles.



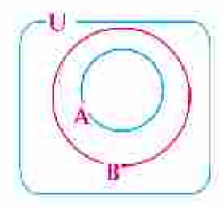
$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ d'où $0.72 = 3x + x$

$\therefore x = 0.18$; $P(A) = 0.18$ et $P(B) = 0.54$

2) $\because A \subset B$ $\therefore A \cup B = B$

$P(A \cup B) = P(B) = 3x = 0.72$

$\therefore P(A) = 0.24$, $P(B) = 0.72$



Essayez de résoudre

9) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et P la fonction de probabilité définie sur U où:

$P(B) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ trouvez $P(A)$ dans chacun des cas suivants.

a Si A et B sont deux événements incompatibles. **b** Si $B \subset A$

Pensé critique :

Comment peut-on calculer $P(A)$ si $A \subset U$, U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, P est la fonction de probabilité définie sur U et $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{3}{7}$

Essayez de résoudre

10) Soient E l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire où $U = \{A , B , C\}$, si $\frac{P(A')}{P(A)} = \frac{2}{3}$ et $\frac{P(B')}{P(B)} = \frac{5}{2}$ trouvez $P(C)$

Exemple

10) **En lien avec le milieu scolaires :** Si la probabilité qu'un étudiant réussisse son examen de physique est 0,85 ; la probabilité qu'il réussisse son examen de mathématiques est 0,9 et la probabilité qu'il réussisse les deux examens ensemble est 0,8 , calculez la probabilité de :

a La réussite de l'étudiant à l'un des deux examens au moins.

b La réussite de l'étudiant en mathématiques seulement.

c La non réussite de l'étudiant aux deux examens ensemble.

Solution

Soient A l'événement « réussite de l'étudiant en physique » et B l'événement « réussite de l'étudiant en mathématiques .

On a : $P(A) = 0.85$, $P(B) = 0.9$, $P(A \cap B) = 0.8$

a La probabilité de la réussite de l'étudiant à l'un des deux examens au moins $= P(A \cup B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.85 + 0.9 - 0.8 = 0.95$

b La probabilité de la réussite de l'étudiant en mathématiques seulement signifie la probabilité de la réussite en mathématiques et la non réussite en physique c'est-à-dire $P(B - A)$ $\therefore P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = 0.9 - 0.8 = 0.1$

c L'événement « non réussite de l'étudiant aux deux examens ensemble» = $(A \cap B)'$;
C'est l'événement complémentaire de l'événement $(A \cap B)$
$\therefore P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.8 = 0.2$

Application de la vie courante:

Essayez de résoudre

11 Pour être recruté à un poste dans une entreprise, la personne doit passer deux tests. l'un est théorique et l'autre est pratique. La probabilité de réussir le test théorique est 0,75 ; la probabilité de réussir le test pratique est 0,6 et la probabilité de réussir les deux tests ensemble est 0,5. Une personne se présente pour la première fois pour avoir ce poste. Calculez la probabilité de :

a Réussir le test théorique seulement. **b** Réussir l'un des deux tests au moins.

Pensé critique:

En lien avec le sport : A Lors d'une conférence de presse, l'entraineur d'une équipe déclare que la probabilité que son équipe gagne le match d'allée est 0,7 , la probabilité qu'elle gagne le match de retour est 0,9 et la probabilité qu'elle gagne les deux matchs ensemble est 0,5. Les déclarations de l'entraineur de l'équipe sont-elles compatibles avec la notion de probabilité ? Expliquez votre réponse.

Exemple

11 On lance un dé non truqué deux fois de suite et observe les nombres apparus sur la face supérieure. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants

(1) A « la somme des deux nombres est plus petit ou égale à 4 »

(2) B « l'un des deux nombre est le double de l'autre »

(3) C « la différence absolue des deux nombres est 2 »

(4) D « la somme des deux nombres est plus grand que 12 »

Solution

card (U) = 36

(1) $A = \{(1;1), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (3;1)\}$ $\therefore$ card (A) = 6 $\therefore P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(2) $B = \{(1;2), (2;1), (2;4), (4;2), (3;6), (6;3)\}$ $\therefore$ card (B) = 6 $\therefore P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(3) $C = \{(1;3), (3;1), (2;4), (4;2), (3;5), (5;3), (4;6), (6;4)\}$ $\therefore P(C) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

(4) $\because D = \phi$, $\therefore P(D) = 0$ car ce n'est possible d'avoir deux nombres dont la somme est plus grand que 12 .

Essayez de résoudre

12 Dans l'exemple précédent, calculez les probabilités des événements suivants :

(1) l'événement A « Les deux nombres apparus sont égaux »

(2) l'événement B« Le nombre de la première lance est pair et le nombre de la deuxième lance est impair »

Exemple

12 On jette une pièce de monnaie non pipée trois fois de suite et on observe la succession des piles et des faces. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

(1) l'événement A « obtenir face une fois seulement .

(2) l'événement B « obtenir face deux fois au moins .

(3) l'événement C « obtenir face deux fois exactement .

Solution

U = { (F ; F ; F), (F ; F ; P), (F ; P ; F), (F ; P ; P) ,
(P ; F ; F), (P ; F ; P) , (P ; P ; F), (P ; P ; P)},
et card (U) = 8

(1) $\because$ A est l'événement « obtenir face une fois seulement.

$\therefore$ A = { (F ; P ; P) , (P ; F ; P), (P ; P ; F)} ,

$\because$ cord (A) = 3 $\therefore$ P (A) = $\frac{3}{8}$

(2) $\because$ B est l'événement « obtenir face deux fois au moins »
c'est-à- dire obtenir deux ou trois faces

$\therefore$ B = { (F ; F ; P) , (F ; P ; F), (P ; F ; F), (F ; F ; F)}

$\because$ card (B) = 4 $\therefore$ P (B) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$



(3) $\because$ C est l'événement «obtenir face deux fois exactement»

$\therefore$ C = { (F ; F ; P), (F ; P ; F), (P ; F ; F)} $\because$ card (C) = 3 $\therefore$ P (C) = $\frac{3}{8}$

Essayez de résoudre

13 Dans l'exemple précédent, Calculez la probabilité des événements suivants :

(1) l'événement A « obtenir le même résultat dans les trois jets»

(2) l'événement B « obtenir face une fois au plus.»

(3) l'événement C « obtenir un nombre impair de faces»

(4) l'événement D « obtenir pile une fois au moins.»

(5) l'événement F « obtenir un nombre de faces équivalent au nombre de piles.»

Exemple

13 **En lien avec la société :** Dans l'un des conférences il y avait 200 personnes de nationalité différentes comme l'indique le tableau ci-dessous.

	Parle arabe	Parle anglais	Parle français	Total
Homme	50	45	25	120
Femme	45	30	5	80
total	95	75	30	200

Si on choisit une personne au hasard, trouvez la probabilité que la personne choisie soit :

a Une femme qui parle arabe.
b Un homme qui parle anglais.
c Une personne qui parle l'arabe ou français.
d Une personne qui parle l'arabe et l'anglais.
e Une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe.

Solution

a La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui parle arabe = $\frac{45}{200}$ = 0,225

b La probabilité que la personne Choisissez soit un homme qui parle l'anglais = $\frac{45}{200}$ = 0,225

c La probabilité que la personne Choisissez soit une personne qui parle l'arabe ou français = $\frac{95+30}{200}$ = 0,625

d La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe = p (ϕ) = 0

e La probabilité que la personne Choisissez soit une femme qui ne parle ni l'anglais ni l'arabe = $\frac{5}{200}$ = 0,025

Essayez de résoudre

(14) Dans l'exemple précédant. Calculez la probabilité que la personne Choisissez :

a Une personne qui ne parle pas l'anglais . **b** une personne qui parle l'allemand .
c Une femme qui parle le français ou l'anglais .
d Un homme qui parle l'arabe ou une femme qui parle l'anglais .



(1) Un élève veut acheter un cartable. Il a le choix entre trois sortes de cartables à deux volumes différents et à deux couleurs différentes noire et marron. Représenter l'univers des éventualités de cette situation par un arbre graphique.

(2) On jette une pièce de monnaie puis un dé et on note le résultat apparu sur leurs faces supérieures.

a Ecrivez l'univers des éventualités puis détermine les événements suivants:

- l'événement A « obtenir face et un nombre impair ».
- l'événement B « obtenir pile et un nombre pair »
- l'événement C « obtenir un nombre premier plus grand que 2»
- l'événement D « obtenir un nombre divisible par 3»

(3) On jette un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure, détermine les événements suivants :

- l'événement A « obtenir deux nombres égaux. »
- l'événement B « obtenir deux nombres dont la somme est 9 ».

- l'événement C «obtenir deux nombres dont la somme est 13 ».
- l'événement D « obtenir 3 une seul fois».

(4) Formez un nombre de deux chiffres différents parmi les chiffres {1 ; 2 ; 3 ; 4} Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique, écrivez l'univers des éventualités puis détermine les événements suivants :

- l'événement A « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est impaire».
- l'événement B « obtenir un nombre dont le chiffre des dizaine est impaire ».
- l'événement C « obtenir un nombre dont les deux chiffres sont impaires».
- l'événement D « obtenir un nombre dont le chiffre des unités ou le chiffre des dizaines est impair».

(5) Un sac contient 20 cartes identiques numérotées de 1 á 20. On tire au hasard une carte et on note le nombre inscrit sur cette carte. Déterminez les événements suivants :

(a) L'événement A « obtenir un nombre pair supérieur á 10 »
(b) L'événement B « obtenir un diviseur de 12»
(c) L'événement C « obtenir un nombre impair divisible par 3 »
(d) L'événement C « obtenir un nombre multiple de 2 et de 5 »
(e) L'événement D « obtenir un nombre premier »
(f) L'événement F « obtenir un nombre vérifiant l'inéquation $5x - 3 \leqslant 17$

(6) Parmi 8 cartes identiques numérotées de 1 á 8, on tire au hasard deux cartes l'une après l'autre avec remise. Quel est le nombre des éléments de l'univers des éventualités :

(a) Si l'événement A « le nombre dans le deuxième tirage est le triple du nombre dans le premier tirage »
(b) l'événement B « la somme des deux nombres est supérieure á 13 » Ecrivez A et B. A et B sont ils incompatibles ? Expliquez votre réponse.

(7) On jette une pièce de monnaie trois fois de suites et on note la succession des faces et des piles. Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique puis déterminez les événements suivants :

(a) l'événement A « obtenir pile deux fois au moins »
(b) l'événement B « obtenir pile deux fois au plus »
(c) l'événement C « obtenir face dans le premier jet »
(d) l'événement D « ne pas obtenir face dans les trois jets »

(8) On jette une pièce de monnaie puis un dé. On note les résultats apparus sur les faces supérieures de la pièce et du dé. Représentez l'univers des éventualités par un arbre graphique puis déterminz les événements suivants :

(a) l'événement A « obtenir pile et un nombre pair »
(b) l'événement B « obtenir face et un nombre impair »
(c) l'événement C « la non réalisation de A ou la non réalisation de B »
(d) l'événement D « la réalisation de A seulement »
(e) l'événement E « la réalisation de A et la réalisation de B »

Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

(9) Si on jette un dé une seule fois, alors la probabilité d'obtenir un nombre impair inferieur á 5 est :

(a) $\frac{2}{5}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{6}$

(10) Si on jette un dé deux fois de suite, alors la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le

premier jet et un nombre premier dans le deuxième jet est :

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{1}{6}$ **c** $\frac{1}{9}$ **d** $\frac{1}{4}$

11 Une boite contient 3 boules blanches, 5 boules rouges et 7 boules vertes, si on tire au hasard une boule, alors la probabilité que la boule tirée soit blanche ou verte est :

a $\frac{1}{5}$ **b** $\frac{2}{3}$ **c** $\frac{7}{15}$ **d** $\frac{1}{2}$

12 Une boite contient 9 cartes identiques numérotées de 1 á 9, si on tire au hasard une carte, alors la probabilité que la carte tirée porte un nombre qui divise 9 ou un nombre impair est :

a $\frac{1}{3}$ **b** $\frac{7}{9}$ **c** $\frac{1}{2}$ **d** $\frac{5}{9}$

13 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $B \subset A$ et $P(A) = 2P(B) = 0.6$ alors $P(A - B)$ est égale à:

a 0.6 **b** 0.3 **c** 0.4 **d** 0.2

14 On jette un dé régulier dont ses faces portent les nombres 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

a Calculez la probabilité de chacun des événements suivants:

- L'événement A «obtenir un nombre impair».
- L'événement B «obtenir un nombre premier».
- L'événement C «obtenir un nombre pair».
- L'événement D « obtenir un nombre plus grand que 12».
- L'événement G « obtenir un nombre formé d'un seul chiffre »
- L'événement F « obtenir un nombre formé de deux chiffres ».

b Calculez : $P(A \cup C)$, $P(U \cup F)$, $P(B \cap D)$.

15 Soit U = { A ; B ; C ; D } l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 3\,P(B)$, $P(C) = P(D) = \frac{7}{18}$. Calculez P(A) et P(B) plus grand que 12 ».

16 Soit A et B deux événements incompatibles de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A \cup B) = 0.6$, $P(A - B) = 0.25$ Trouvez, P(A), P(B).

17 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ trouvez :

a $P(A')$ **b** $P(A \cup B)$ **c** $P(A - B)$ **d** $P(A' \cap B')$

18 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et : $P(A) = 0.4$, $P(B') = 3P(B)$ et $P(A \cap B) = 0.2$. Calculez la probabilité des événements suivants :

a la réalisation de A seulement . **b** la réalisation de A ou B

c la réalisation de A et la non réalisation de B .

19 Une boîte contient des boules coloriées identiques parmi lesquelles il y a 4 boules rouges, 6 boules bleues et 5 boules jaunes. On tire une boule au hasard.

Calculez la probabilité que la boule tirée soit :

a soit rouge. **b** soit bleu ou jaune.

c ne soit pas bleu . **d** ne soit ni rouge ni jaune.

20 Une boite contient des cartes numérotées de 1 à 30. On tire au hasard une carte. Calculez la probabilité que la carte tirée porte:

a un nombre divisible par 3
b un nombre divisible par 5
c un nombre divisible par 3 et par 5
d un nombre divisible par 3 ou par 5

21 On jette une fois trois pièces de monnaie distinctes. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

- L'événement A « obtenir face une ou deux fois»..
- L'événement B « obtenir face au moins une fois ».
- L'événement C « obtenir face une fois au plus »..
- L'événement D « obtenir pile deux fois de suite au moins »..

22 On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre inscrit sur la face supérieure .
Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

- L'événement « obtenir le nombre 4 lors du premier jet»..
- L'événement « la somme des deux nombres obtenus est égale à 8 ».
- L'événement « la somme des deux nombres obtenus est inferieure ou égale à 5 ».

23 **En lien avec le sport :** Dans un échantillon constitué de 60 personnes, on trouve que 40 personnes supportent le club Al Hilal, 28 personnes supportent le club Al Negma et 8 personnes ne supportent aucun des deux clubs si on choisit une personne de l'échentillon, qu'elle est la probabilité que la personne choisie soit un support:

a de l'un des deux clubs au moins?
b des deux clubs ensemble?
c du club Al Hilal seulement?
d de l'un des deux clubs seulement?

24 On jette une pièce de monnaie puis un dé. O note le résultat apparu sur la face supérieure de cette pièce et le nombre apparu sur ce dé. Si l'événement A « obtenir face et un nombre premier» . l'événement B « obtenir un nombre pair.
Calculez la probabilité de chacun des événements suivants:

a la réalisation de l'un des deux événements au moins
b la réalisation des deux événements à la fois
c la réalisation de B seulement
d la réalisation de l'un des deux événements seulement .

25 On tire au hasard une carte parmi 50 cartes numérotées de 1 à 50
Calculez la probabilité que la carte tirée porte un nombre :

a qui est multiple de 7
b qui est carrée parfait
c qui est multiple de 7 et carrée parfait
d qui n'est ni carrée parfait ni multiple de 7

26 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et :
$P(B) = \frac{4}{5} P(A)$, $P(A - B) = 0.24$ et $P(B \cap A') = 0.15$ Trouvez :
$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B')$

27 Tarek a écrit 75 messages sur un ordinateur. Il a trouvé que 60% de ce qu'il a écrit sont sans erreur. Zeyad a écrit 25 messages. Il a trouvé que 80% de ce qu'il a écrit sont sans erreur. Si on choisi au hasard un message de ce qu'ils ont écrit, trouve la probabilité que le message choisi soit :

a sans erreur.
b écrit par Zeyad.
c écrit par zeyad et sans erreur .
d Tarek l'a écrit avec des erreurs.

28 Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que:
$P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.8$ et $P(A' \cup B') = 0.5$, alors trouvez $P(A' \cap B)$

Résumé de l'unité

1 **Expérience aléatoire :** C'est une expérience dont on peut déterminer parfaitement, par avance, toutes les issues possibles mais on ne peut pas prévoir, laquelle de ces résultats sera réalisé.

2 **Univers des éventualités (univers des résultats)** L'univers des éventualités d'une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience et on le note U

3 **L'événement :** C'est un sous ensemble de l'univers des éventualités.

4 **L'événement élémentaire :** C'est un sous ensemble de l'univers des éventualités qui contient un seul élément.

5 **L'événement certain:** C'est l'événement dont les éléments sont le même que l'univers U.

6 **L'événement impossible :** C'est l'événement qui ne contient aucun élément. Il est noté ϕ .

7 **Opérations sur les événements:** L'intersection – l'union – la complémentarité – la différence.

8 **Événements incompatibles**

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles si $A \cap B = \phi$.
- On dit que plusieurs événements sont incompatibles si et seulement si ils sont incompatibles deux à deux

9 **Axiomes de la probabilité**

- Si U est univers d'une expérience aléatoire et ses événements élémentaires sont équiprobables
- Alors la probabilité de la réalisation de $A \subset U$ qui est notée $P(A) = \dfrac{\text{card }(A)}{\text{card }(U)}$

10 **Axiomes de la probabilité**

- Pour tout $A \subset U$, il existe un nombre réel appelé la probabilité de l'événement A et notée P(A) tel que : $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(U) = 1$
- Si $A \subset U$; $B \subset U$ et A, B sont deux événements incompatibles, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

11 Si $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = U$ et ils sont tous incompatibles deux á deux, alors $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_n) = 1$

12 $P(\phi) = 0$

13 Si $A \subset U$ où U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, alors $P(A') = 1 - P(A)$

14 Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors

a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **b** $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

15 Événements sous la forme verbale, leurs présentations par le diagramme de Venn et leurs probabilités :

Forme verbale de l'événement	Représentation de l'événement par un diagramme de Venn	Probabilité de la réalisation de l'événement
Non réalisation de l'événement A	U, A', A	$P(A') = 1 - P(A)$
Réalisation de A ou B (réalisation de l'un d'eux au moins)	U, B, A **$A \cup B$**	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Réalisation de A et B (réalisation des deux á la fois)	U, B, A **$A \cap B$**	$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
Réalisation de A seulement (réalisation de A et non réalisation de B)	U, B, A **$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$**	$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B')$
Réalisation de l'un des deux événements seulement (réalisation de A seulement ou B seulement)	U, B, A **$(A - B) \cup (B - A)$**	$P((A - B) \cup (B - A))$ $= P(A - B) + P(B - A)$ $= P(A \cup B) - P(A \cap B)$
Non réalisation d'aucun des deux événements (non réalisation de A et non réalisation de B	U, B, A **$(A \cup B)' = A' \cap B'$**	$P(A \cup B)' = P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$
Non réalisation des deux événements á la fois (non réalisation de A ou non réalisation de B)	U, B, A **$(A \cap B)' = A' \cup B'$**	$P(A \cap B)' = P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$
Non réalisation de A seulement (réalisation de B ou non réalisation de A)	U, B, A **$(A - B)' = B \cup A'$**	$P(A - B)' = 1 - P(A - B) = P(B \cup A')$ $= P(A') + P(A \cap B)$

مطابع دار أخبار اليوم



Exercices généraux



Choisissez la bonne réponse parmi les proposées :

On jette un dé deux fois de suite :

1 (1) La probabilité d'obtenir 5 dans le premier jet et 6 dans le deuxième est

a $\frac{1}{24}$ **b** $\frac{1}{30}$ **c** $\frac{1}{36}$ **d** $\frac{1}{6}$

2 La probabilité d'obtenir 5 dans l'un des deux jets et 6 dans l'autre est

a $\frac{1}{12}$ **b** $\frac{1}{6}$ **c** $\frac{5}{36}$ **d** $\frac{1}{18}$

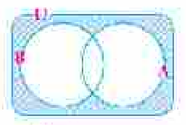
3 La probabilité d'obtenir deux nombres égaux dans les deux jets est

a $\frac{1}{5}$ **b** $\frac{1}{36}$ **c** $\frac{1}{6}$ **d** $\frac{1}{18}$

Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, choisissez l'événement qui représente la partie hachurée :

4 **a** $U - (A \cup B)$ **b** $A' \cup B'$

c $U - (A' \cup B')$ **d** $(A \cap B)'$

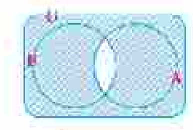


5 **a** $A \cap B$ **b** $A \cup B'$

c $(A \cup B)'$ **d** $A' \cup B'$

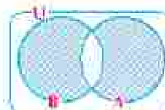
6 **a** $(A \cup B) - (A \cap B)$ **b** $U - (A \cap B)'$

c $U - (A \cup B)'$ **d** $U - (A \cap B)$



7  **a** $U - (A \cap B)$ **b** $A' \cap B'$

c $(A - B) \cup (B - A)$ **d** $U - (A \cup B)'$



8 Parmi les chiffres du nombre 4321, forme des nombres formés des deux chiffres différents. Représente l'univers des éventualités par un arbre graphique puis écrivez -le et les événements suivants:

l'événement A « ensemble des nombres premiers »

l'événement B « ensemble des nombres divisible par 3 »

l'événement C « ensemble des nombres divisible par 3 et par 5 »

l'événement D « obtenir des nombres dont le chiffre des unités est le double de celui des dizaines »

9 On jette un dé une seule fois et on note le nombre apparu sur la face supérieurs.

Calculez la probabilité que ce nombre soit:

a premier **b** un diviseur de 6 **c** impair divisible par 3

10 Si A et B sont deux événements de l'univers d'une expérience aléatoire.

Complète ce qui suit pour obtenir des propositions correctes :

a Si A et B sont deux événements incompatibles, alors :

- $A \cap B =$ ....
- $A - B =$ ....
- $B - A =$ ....

b Si $B \subset A$ alors:

- $(A \cap B) =$ ....
- $A \cup B =$ ....
- $B - A =$ ....

c Si $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$ alors:

- $P(A \cup B) =$ ....
- $P(B - A) =$ ....
- $P(A' \cap B') =$ ....

d Si $A \cap B = \phi$, $P(A') = 0{,}7$ et $P(B') = 0{,}4$ alors:

- $P(A \cup B) =$ ....
- $P(A \cap B) =$ ....
- $P(A - B) =$ ....

11 Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, $A \subset B$, $P(A) = \frac{1}{2}$, et la probabilité de la réalisation de B seulement est égale à 0,2. Calculez la probabilité de la non réalisation de B.

12 Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire . P est la fonction de la probabilité définie sur U et $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = x$ et $P(A \cup B)' = \frac{1}{3}$

a Trouvez x si
- A et B sont incompatibles.
- $A \subset B$.

b Si $x = \frac{1}{4}$ trouvez $P(A \cap B)$.

13 Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Exprimez chacun des événements suivants par des expressions symboliques puis représentez-les par un diagramme de Venn:

a la non réalisation de A

b la réalisation des deux événements A ou B.

c la réalisation de B seulement .

d la réalisation de A et la non réalisation de B.

e la non réalisation des deux événements à la fois .

f la réalisation de l'un des deux événements seulement .

14 On jette une pièce de monnaie trois fois de suite. On note la succession des faces et des piles. Représentez l'univers des éventualités de cette expérience par un arbre graphique puis calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

a L'événement A « obtenir face deux fois exactement »

b L'événement B « obtenir face deux fois au plus »

c L'événement C « obtenir pile une fois au plus »

d L'événement D « obtenir le même résultat dans les trois jets » .

(15) On lance un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure.

a Dessiner une figure géométrique représentant l'univers des éventualités U sur laquelle, montrez les événements suivants .

- L'événement A « obtenir deux nombres dont la somme est un nombre impair et plus grand que 6 ».
- L'événement B « obtenir deux nombres dont l'un est 2 et la somme $\leqslant 5$ ».
- L'événement C « obtenir deux nombres égaux ».

b Lesquels des événements A ; B et C sont incompatibles deux à deux?

c Calculez ce que suit: $P(A \cup B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cup C)'$, $P(B - C)$.

(16) Parmi cinq cartes identiques numérotées de 2 à 6, on tire deux cartes l'une après l'autre avec remise et on observe le nombre inscrit sur la carte tirée pour former tous les nombres à deux chiffres possibles. Trouver la probabilité que :

a le chiffre des unités soit un nombre premier.

b le chiffre des dizaines soit impair.

c le chiffre des unités soit un nombre premier ou son chiffre des dizaines soit un nombre impair.

Journal:

(17) Dans un échantillon de 50 personnes on trouve que 27 personnes lisent le journal A, 24 personnes lisent le journal B et 9 personnes lisent les deux journaux ensemble. On choisit une personne de cet échantillon au hasard. Calculez la probabilité que la personne choisie lise.

a le journal A seulement.

b l'un des deux journaux au mois.

Tourisme :

(18) Dans l'un des spectacles du son et lumière présenté aux Pyramides, il y avait 200 personnes de nationalité différentes comme l'indique le tableau ci-contre. Si on choisit un spectateur au hasard à l'aide des tickets d'entrée pour lui offrir un souvenir, trouve la probabilité que la personne choisie soit :

	Arabe	Europeen	Americain	Total
Homme	32	47	15	94
Femme	23	63	20	106
total	55	110	35	200

a un homme européen.

b une femme américaine.

c une femme.

d une personne qui a une nationalité arabe ou une européenne.

(19) Soit $U = \{A ; B; C\}$, l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que , $20P(A) = 15P(B) = 12P(C)$ trouvez : $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$

Épreuve cumulative

Complétez ce qui suit :

1. Si on jette un dé une fois et on note le nombre apparu sur la face supérieure, alors l'univers des éventualités U = ...
2. Si on jette une pièce de monnaie deux fois de suite et on note le résultat apparu sur la face supérieure, alors l'événement « avoir face une fois au plus » = ...
3. Si on jette un dé puis une pièce de monnaie, et on note le résultat apparu sur la face supérieure de chacun, alors l'événement « avoir un nombre premier » = ...
4. Si on jette un dé deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieure, alors l'événement « la somme des deux nombres est 5 » = ...
5. Si on tire au hasard une carte parmi 20 cartes identiques numérotées de 1 à 20 et on note le nombre inscrit sur la carte tirée, alors l'événement « le nombre inscrit sur la carte tirée est divisible par 3 » = ...
6. Si on jette une pièce de monnaie trois fois de suites et on note la succession des faces et des piles, alors l'événement « avoir deux faces exactement » = ...
7. Si $A \subset U$ où U est l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et $P(A') = 3\ P(A)$ trouvez $P(A')$.
8. Une boite contient 20 cartes identiques numérotées de 1 à 20. Si on tire aléatoirement une carte de cette boite, trouvez la probabilité que le nombre inscrit soit :

   a divisible par 6 **b** premier supérieur à 10 **c** un facteur de 12

9. Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A \cup B) = 0{,}85$, $P(A) = 0{,}75$ et $P(B') = 0{,}6$ trouvez :

   a $P(A \cap B)$ **b** $P(A \cap B')$ **c** $P(A' \cup B')$

10. Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = \frac{2}{3} P(B)$; la probabilité de l'événement « l'un de deux événements est réalisé au plus» est égal à 0,75 et la probabilité que l'un de deux événements est réalisé au moins est égal à 0,6 ; trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

    a la réalisation des deux événements simultanément .
    b la réalisation de l'un des deux événements seulement .
    c la réalisation de A et la non-réalisation de B.

11. Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A') = \frac{3}{5}$ $P(A \cup B) = 0{,}45$; trouvez $P(B)$ dans chacun des cas suivants :

    a A et B sont deux événements incompatibles **b** $A \subset B$

    c $P(B - A) = 0{,}2$

(12) **Un groupe touristique :** se compose de 19 Russes, 17 Italiens et 14 Français. Si on choisit au hasard un touriste parmi eux, calculez la probabilité que le touriste choisit:

a soit Russe ou français .
b ne soit pas Français .
c soit Européen .
d soit Néerlandais.

(13) **En lien avec l'environnement scolaires :** Dans la cérémonie d'hommage des étudiants supérieures, la probabilité que le gouverneur assiste à cette cérémonie est égal à 0,8 ; la probabilité que le directeur général assiste à cette cérémonie est égal à 0,9 et la probabilité que les deux assistent en même temps est égal à 0,75. Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a l'assistance du gouverneur seulement .
b l'assistance de l'un de deux au moins.
c la non-assistance de deux ensemble.

(14) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 0{,}6$; $P(B') = 0{,}3$ et $P(A \cup B) = 0{,}9$; Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a la réalisation de A ou B
b la réalisation de A et non B
c la réalisation de A seulement ou B seulement

(15) Soit U l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire tel que $U = \{A, B, C\}$

$\frac{P(C')}{P(C)} = \frac{7}{3}$ et $2\,P(B) = 3\,P(B')$, trouvez $\frac{P(C')}{P(C)}$

(16) Soient A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = 0.6$; $P(B) = 0.5$ et $P(A' \cup B') = 0.7$. Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a la réalisation de A et B ensemble
b la réalisation de A seulement
c la réalisation de l'un de deux événements au moins
d la réalisation de l'un de deux événements seulement

(17) 50 candidats se sont présentés pour un poste dans une banque comme indiqué par le tableau ci-contre. On choisit au hasard un candidat.Trouvez la probabilité que le candidat choisi soit :

Sexe	licenciée	baccalauréat	Total
Mâle	16	14	30
Femelle	12	8	20
Total	28	22	50

a une femme .
b baccalauréat .
c licenciée .
d femme ou licenciée .


Epreuves Générales

Epreuve (1) Epreuves générales

Répondre aux questions suivantes

Premier question: Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Soient deux forces d'intensités 3F , 2F et l'intensité de leur résultante 5 F, alors la mesure de l'angle entre leurs droites d'action est:
   a) zéro°   b) 60°   c) 20°   d) 180°
2. Une voiture se déplace avec une vitesse uniforme de 90 km/h pendant 30 minutes , alors la distance parcourus durant cette période en km est égale à:
   a) $\frac{3}{4}$ b) 2.7   c) 45   d) 162
3. Tous les cas suivants déterminent un plan sauf:
   a) Une droite et un point qui ne lui pas appartient.
   b) Deux droites parallèles différentes.   c) Deux droites sécantes.
   d) Deux droites non coplanaires.
4. Si on jette une pièce de monnaie une fois et on note le résultat apparu sur la face supérieure, alors la probabilité de ne pas obtenir face est:
   a) 0   b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1

Deuxième question:

1. Soient $\overrightarrow{F_1} = 5\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{F_2} = a\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$ et $\overrightarrow{F_3} = -14\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ trios forces concourantes et leurs résultante $\overrightarrow{R} = (10\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi)$ Trouve a et b.
2. Un corps de poids 300 g p est posé sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle dont la tangente est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ Le corps est en équilibre à l'aide d'une force incliné sur le plan du plus grande pente d'un angle de 30° vers le haut. Trouver l'intensité de la force et l'intensité de la réaction du plan.

Troisième question:

1. Un cycliste a parcouru une distance de 37.5 km sur une ligne droite à une vitesse de 25 km/h, puis 18 k à une vitesse de 12 km/h. Calcule la norme du vecteur de la vitesse moyenne pendant le trajet si:
   a) les deux déplacements ont même sens.
   b) les deux déplacements ont des sens contraires.
2. Un corps commence son mouvement par une accélération uniforme de 5 cm/s^2 et une vitesse initiale 20 cm/s contre le sens de l'accélération. Trouver sa vitesse et son déplacement après:
   a) 3 secondes.   b) 4 secondes.   c) 6 secondes.   d) 9 secondes.

Quatrième question:

1. Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ Trouve: a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cup B')$
2. Trouver la forme générale de l'équation du cercle de centre (2 ; -1) et de rayon 3 cm.

Epreuve (2) Applications Mathématiques

Répondre aux questions suivantes:

Premier question: Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Si on choisit au hasard une lettre de l'ensemble des lettres E = { A ; B ; C ; D ; E ; F ; K ; L ; M; N; O; R; U; X}, alors la probabilité que la lettre Choisissez soit une lettre du mot Mabrouk est:
   a $\frac{1}{4}$ b $\frac{1}{3}$ c $\frac{1}{2}$ d $\frac{2}{3}$

2. Le point qui se trouve sur le cercle d'équation $(x - 2)^2 + y^2 = 13$ est
   a (2; 3) b (3; -2) c (2; 5) d (4; 3)

3. Deux forces d'intensités 5 et 3 Newton sont concourantes dont la mesure de leur angle est 60°. Alors leur résultant est:
   a 2 b 7 c 8 d 5

4. 180 m / h / s = ... cm / s^2
   a $\frac{1}{20}$ b 5 c 30 d 300

Deuxième question:

1. Un cube de cire de 30 cm d'arrêt est fondu et transformé en un cône circulaire droit de 45 cm de hauteur. Trouver la longueur du rayon de la base du cône sachant que 8% de la cire a été perdue pendant la fente et la transformation.

2. Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire Si $P(A) = \frac{3}{8}$ et $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, trouve P(B) dans chacun des cas suivants.
   a A et B sont incompatibles b $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

Troisième question :

1. Une barre homogène de longueur 100 cm et de poids 150 g p. est attachée par deux fils dont les extrémités sont fixés en un point. Si les longueurs des fils sont 80 cm et 60 cm. Trouvez la tension de chacun de deux fils.

2. ABCDEF est un hexagone régulier des forces d'intensités 8, $6\sqrt{3}$, 5 et $4\sqrt{3}$ sont appliqués suivant $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ respectivement. Trouver l'intensité et la direction de leur résultante.

Quatrième question :

1. La vitesse d'une voiture est diminué régulièrement de 66 m/s à 79,2 km/h quand elle parcourt une distance de 66 mètres. Trouvez le temps pour parcourir cette distance, puis la distance parcouru jusqu'à son arrête

2. D'un point au sol un corps est lancé verticalement vers le haut puis il revient au point de lancement après 10 seconds trouvez:
   a la vitesse initiale. b la hauteur maximale.

Epreuve (3) Applications Mathématiques

Répondre aux questions suivantes :

Premier question : Choisessez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Trois forces de même intensité concourantes en équilibre, alors la mesure de l'angle entre chaque deux forces est égale à :
   a) $60°$ b) $90°$ c) $120°$ d) $150°$
2. A et B sont deux corps se déplacent en sens contraire dont la norme de la vitesse de A est le double de celle de B, alors v_{AB} = ...
   a) $1{,}5\ v_A$ b) $2\ v_A$ c) $2{,}5\ v_A$ d) $3\ v_A$
3. Soit A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire Si $A \subset B$ alors $P(A \cup B)$ est égale à
   a) $P(A)$ b) $P(B)$ c) $P(A) + P(B)$ d) $P(A \cap B)$
4. Le périmètre du cercle d'équation : $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ est égale à .... unité de longueur
   a) 2π b) 3π c) 10π d) 25π

Deuxième question:

1. Un corps est tombé verticalement, d'une hauteur 22,5 m vers un sol sableux et il s'y enfonce d'une distance de 25 cm avant le repos. Calculer:
   a) La vitesse du corps au moment où il atteint le sol.
   b) l'accélération du mouvement dans le sable.
2. Un corps se déplaçant en ligne droite avec une accélération uniforme a parcouru 26 cm durant la quatrième second puis une distance de 56 cm durant la neuvième second. Calculez:
   a) l'accélération. b) la vitesse initiale .

Troisième question:

1. Soit une sphère homogènne lisse de poids 10 g p et de longueur de rayon 30 cm. On l'attache par le point B de sa surface par un fil de longueur 30 cm. L'autre extrémité A du fil est fixée en un mur lisse vertical. La sphère est en équilibre lorsqu' elle repose sur le mur. Trouver l'intensité de la tension du fil et l'intensité de la réaction du mur sur la sphère:
2. Sachant que la longueur de chacun de rayon de la Lune et de la Terre est 1600 km. et 6400 km respectivement, le rapport entre l'accélération de l'attraction entre eux est 1 : 6. Trouvez le rapport entre leurs masses.

Quatrième question :

1. Une pyramide régulière à base quadrilatère de longueur de base 10 cm et de hauteur $10\sqrt{3}$ cm. Calculer :
   a) son aire latérale. b) son volume .
2. Soit A et B deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire Si $P(B) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$ Trouve:
   a) $P(A')$ b) $P(A \cup B)$ c) $P(A - B)$ d) $P(A' \cup B')$

Epreuve (4) Applications Mathématiques

Répondre aux questions suivantes:

Premier question : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Dans l'univers, les forces d'attraction entre les planètes ne paraissent pas clairement en raison de:
   - a l'éloignement entre elles.
   - b la grandeur de leurs masses.
   - c le rapprochement entre elles.
   - d b et c ensemble.

2. Si $\overrightarrow{F_1} = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ alors F_1 et F_2 mesurés en Neton , alors l'intensité de leur résultante est:
   - a $\sqrt{2}$
   - b $\sqrt{5}$
   - c $\sqrt{13}$
   - d 5

3. Le centre du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8\,y = 0$ est le point ....
   - a (3 ; -4)
   - b (4 ; -3)
   - c (-3 ; 4)
   - d (-4 ; 3)

4. On jette un dé une seule fois et on note le nombre apparu sur la face supérieure, alors la probabilité d'obtenir un nombre compris entre 3 et 5 est:
   - a $\frac{1}{6}$
   - b $\frac{1}{3}$
   - c $\frac{1}{2}$
   - d $\frac{2}{3}$

Deuxième question :

1. Une boite contient 30 cartes identiques numérotées de 1 á 30. On tire au hasard une carte. Calculez la probabilité que la carte tirée porte un nombre:
   - a pair divisible par 3.
   - b impaire cube parfait.
   - c premier inferieur á 15.
   - d contenant le chiffre 2 ou le chiffre 3

2. Trouvez le rayon de la base du cône circulaire droit dont l'aire totale est $616\,\pi$ cm^2 et la longueur de son génératrice est 30cm

Troisième question:

1. Trois forces coplanaires d'intensités 85 ; 75 et $50\sqrt{2}$ kgp agissent en un point matériel. Si la première dans la direction de Est ; la deuxième 30° Ouest par rapport au Nord et la troisième dans la direction. Sud - Ouest trouvez l'intensité et le sens de la résultante .

2. Un fil lisse de longueur 30 cm est attaché par ses deux extrémités en deux points A et B tel que $\overline{AB}$ est horizontal , AB = 18 cm. Si un anneau lisse de poids 150 g p glisse sur le fil, démontrez que dans l'état d'equilibre les deux branches du fil sont de même longueur puis trouvez la tension dans chaque branche du fil.

Quatrième question:

1. Une particule se déplace dans un repère orthogonal et se trouve aux deux instants t = 2 et t = 5 dans les deux positions A(7 ; 3) et B (12 ; 10) respectivement. Trouver l'intensité et la direction de la vitesse moyenne de cette particule durant cet intervalle de temps .

2. Une boule en caoutchouc tombe d'une hauteur de 15 mètres sur le sol. Elle heurte le sol et rebondit verticalement vers le haut pour atteindre une distance maximale de 6 m. Calculez la vitesse de la boule juste avant et après qu'elle heurte le sol.

Epreuve (5) — Applications Mathématique

Réponds aux questions suivantes:

Première question : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Soient deux forces de même intensité et si la mesure de leur angle est $\frac{\pi}{3}$ et l'intensité de leur résultante est 3 Newton, alors l'intensité de chacune d'elles est .... Newton

   a) $\frac{3}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 3 d) $3\sqrt{3}$

2. Un corps est tombé d'une hauteur 10 mètres sur un sol horizontale. alors sa vitesse au moment d'arriver au sol en m/s est :

   a) Zéro b) 20 c) 14 d) 196

3. Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, alors la probabilité de la réalisation de l'un des deux événements est:

   a) $P(A \cup B)$ b) $P(A \cup B)'$ c) $P(A \cup B) - P(A \cap B)$ d) $P(A \cap B)$

4. L'aire latérale d'un cône de longueur de rayon de base 6 cm et de hauteur 8 cm = ... cm^2

   a) 60π b) 28π c) 10π d) 48π

Deuxième question :

1. Deux voitures se déplacent sur une route droite la premiere à une vitesse de 90 km/h, la deuxième à une vitesse de 60 km/h. Trouver la vitesse de la premiere voiture par rapport à la deuxième voiture lorsque les deux voitures roulent.

   a) dans le même sens. b) dans des sens contraire.

2. Un train parcourt la distance du Caire à Tanta en deux étapes : première étape du Caire à Tanta une distance de 100 km. à une vitesse de 100 km/h, deuxième étape du Tanta à Alexandrie une distance de 110 km. à une vitesse de 80 km/h, sachant que le train s'arrête à Tanta 10 minutes. Calculez le vecteur vitesse moyenne pendant tous le trajet.

Troisième question :

1. Trois forces d'intensités 5, 10 et $4\sqrt{7}$ Newton, appliquent en un point, si la mesure de l'angle entre la premiere et la deuxième forces est 60°. Trouver la valeur maximale et minimale de la résultante de ces trois forces.

2. $\overline{AB}$ est une échelle homogène de pois $8\sqrt{3}$ repose avec son extrémité A sur un mur vertical lisse et l'extrémité B sue un sol horizontal rugueux. si l'extrémité A se trouve à $\sqrt{3}$ m du sol et l'extrémité B se trouve à 2 m du mur. Trouver la pression au mur et au sol.

Quatrième question :

1. Soit A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire Si $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$, $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{5}{12}$ Trouve la probabilité de la réalisation de chacun des événements suivants:

   a) l'un des deux événements au moins. b) B seulement.

   c) l'un des deux événements au plus.

2. Trouve l'image du cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$ par la translation $(x + 2 ; y - 2)$.

Epreuve (6) Applications Mathématique

Réponds aux questions suivantes:

Première question : Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Si l'intensité de la résultante des deux forces est maximale alors la mesure de l'angle de deux forces est:
   a) $0°$ b) $60°$ c) $120°$ d) $180°$

2. Si la vitesse d'une voiture est diminuée de 90 km/h à 36 km/h durant 4 seconds ; alors la distance dans cette intervalle du temps est égale à ....
   a) 10 m b) 25 m c) 70 m d) 140 m

3. Parmi 10 cartes identiques numérotées de 1 á 10. Si on tire au hasard une carte, alors la probabilité d'obtenir un nombre divisible par 3 est:
   a) 0.2 b) 0.3 c) 0.4 d) 0.5

4. Le volume d'un cône de longueur de rayon de base est r et de hauteur h = ... cm^2
   a) $\frac{4}{3}\pi r^2 h$ b) $\frac{3}{4}\pi r^2 h$ c) $\frac{1}{4}\pi r^2 h$ d) $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Deuxième question :

1. Trouvez la forme générale de l'équation du cercle de centre (2 ; -4) et de rayon 5 cm.
2. Soit A et B deux événements de l'espace des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $P(B') = \frac{3}{8}$ et $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$
   Trouve P(A) dans chacun des cas suivants :
   a) A et B sont incompatibles b) $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

Troisième question :

1. Si la masse de la terre est 5.97×10^{24} kg et son rayon et 6.36×10^{6} m, trouvez la force d'attraction de la Terre sachant que la constante universelle de gravitation est 6.67×10^{-11} Newton.m^2/kg^2

2. Le vecteur de position $\vec{r}$ d'un corps est donné en fonction du temps par la relation :
   $\vec{r} = (6t - 3)\,\vec{i} + (8t + 1)\,\vec{j}$ où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs unitaire de base
   Trouvez la norme dû vecteur déplacement = 3

Quatrième question :

1. Deux forces d'intensité F et $\sqrt{2}$ F Newton sont appliquées à un point matériel. . L'intensité de leur résultante est perpendiculaire à la première force. Trouver la mesure de l'angle formé par leur direction, puis démontrez que leur résultante est égale à F.

2. Une sphère métallique de pois 400g.p. Agisse au son centre, est posée entre deux plans lisses l'un est verticale et l'autre est inclinée sur la verticale d'un angle de mesure 60°, trouvez la réaction de chaque plan.

Epreuve (7) Applications Mathématique

Répondre aux questions suivantes:

Première question: Choisissez la bonne réponse :

(1) La force $\overrightarrow{R}$ est décomposée en deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ faisant deux angles de mesures θ_1, θ_2 de part et d'autre la force $\overrightarrow{R}$. Lors l'intensité de $\overrightarrow{F_1}$ est:

a $\frac{R \sin \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$ b $\frac{R \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 - \theta_2)}$ c $\frac{R \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$ d $\frac{R \sin(\theta_1 + \theta_2)}{\sin \theta_2}$

(2) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire, et $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A) = 1 - P(B)$, alors :

a card (A) = card (B) b card (A) > card (B)
c card (A) < card (B) d card (A) + card (B) = 1

(3) Si on lance un corps verticalement vers le haut à une vitesse de 98 m/s, alors le temps pour arriver à la hauteur maximale =

a 15 s b 10 s c 3 s d 20 s

(4) Le volume d'un cône circulaire droit de longueur du rayon de base 7 cm et la longueur de sa génératrice est 14 cm, est égal à .... cm^3

a $49\sqrt{3}\,\pi$ b $343\,\pi$ c $49\sqrt{3}$ d $\frac{343\sqrt{3}\,\pi}{3}$

Deuxième question:

(1) $\overline{AB}$ est une barre homogène de longueur 40 cm de poids 30 Newton est attachée par son extrémité A à une charnière fixée sur un mur vertical. La barre est maintenue en position horizontale à l'aide d'un fil attaché au point B et à l'autre extrémité à un point C du mur au dessus de A d'une distance 40 cm Trouvez l'intensité et la direction de la réaction en A.

(2) Un corps de poids 18 Newton est posé sur un plan lisse incliné sur l'horizontale d'un angle de mesure 30°. Le corps est empêché de glisser à l'aide d'une force horizontale d'intensité F Newton. Trouver l'intensité de cette force et la réaction du plan sur le corps.

Troisième question:

(1) Un corps commence à se mouvoir dans une direction fixe à une vitesse de 15 cm/s avec une accélération uniforme de 2,5 cm/s^2 dans le même sens que la vitesse initiale. Calculez la distance parcourue par le corps durant la quatrième seconde.

(2) Une boule en caoutchouc tombe d'une hauteur de 90 m du sol. Elle heurte le sol et rebondit verticalement vers le haut à une vitesse qui est égale à la moitié da la vitesse d'arriver au sol. Déterminez la hauteur maximale qu'elle atteinte.

Quatrième question:

(1) On jette une pièce de monnaie trois fois de suite et on note la succession des faces et des piles. Calculez les probabilités des événements suivants :

a l'événement « obtenir pile une seule fois» b l'événement « face deux fois au plus »

(2) Détermine la forme générale de l'équation du cercle du centre (-2 ; 3) et de longueur du rayon de 8 unités de longueur.

Epreuve (8) Applications Mathématiques

Répondre aux questions suivantes :

Première question: Choisissez la bonne réponse :

(1) Soient deux forces de même intensité et dont l'intensité de la résultante est égale à 8 Newton Si la mesure de l'angle de deux forces est $\frac{\pi}{2}$, alors l'intensité de chaque force est égale à .... Newton

a $2\sqrt{2}$ b 4 c $4\sqrt{2}$ d 8

(2) Le plus petit nombre de plans passant par quatre points non coplanaires est ....

a 1 b 2 c 3 d 4

(3) Un corps est lancé verticalement vers le haut à une vitesse de 42 m/s, alors la hauteur maximale est ....

a 65 m b 98 m c 84 m d 90 m

(4) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire et si $A \subset B$, alors :

a $P(A \cup B) = P(B)$ b $P(A \cup B) = 1 - P(A')$ c $P(A \cap B) = P(B)$ d $P(A \cap B) = 0$

Deuxième question:

(1) D'un point fixe (O), une particule se meut en ligne droite. Son vecteur position $\vec{r}$ est déterminé par la relation $\vec{r} = (t^2 + 3t + 5)\ \vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire parallèle à la droite. Trouver le vecteur déplacement ainsi que le vecteur vitesse moyenne du début du mouvement jusqu'à l'instant t = 3 s.

(2) une petite pierre est lancé vers le haut à une vitesse de 19,6 m/s du sommet d'une montagne de hauteur 156,8 m de la surface de la terre. Trouvez :

a le temps mis de début jusqu'à l'arrivée de la terre.

b la vitesse au moment d'arriver à la terre.

troisième question

(1) Une barre homogène $\overline{AB}$ de poids 20 kgp est attachée par son extrémité A à une charnière fixée sur un mur vertical. Une force horizontale $\vec{F}$ agit sur la barre au point B. La barre est en équilibre lorsqu'elle est inclinée sur l'horizontale d'un angle de mesure 30°. Trouver l'intensité de $\vec{F}$, et la réaction sur la charnière.

(2) Décomposer une force d'intensité 100 Newton dans deux directions dont l'une fait un angle de mesure 60° avec la force d'un côté et l'autre fait un angle de mesure 30° avec la force de l'autre côté.

quatrième question

(1) Soit une pyramide régulière à base quadrilatère de longueur de côté de base 18 cm. Si le volume de la pyramide est 1296 cm^3, trouver sa hauteur latérale et son aire latérale

(2) Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si la probabilité de la réalisation de l'événement A = 0,5, la probabilité de la réalisation de l'événement B = 0,6 et la probabilité de n'est pas réalisé les deux événements ensemble = 0.2 calculer les probabilités suivantes :

a Réalisation de A et B ensemble

b Réalisation de l'un de deux événement au moins

c réalisation de B et non réalisation de A

Epreuve (9) Applications Mathématiques

Répondre aux questions suivantes:

Première question: Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1) Si $\overrightarrow{F_1} = 5\,\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{F_2} = 7\,\overrightarrow{i} - 5\,\overrightarrow{j}$, si leur résultante est $\overrightarrow{R}$; alors $\|\overrightarrow{R}\|$

a $\sqrt{5} + \sqrt{74}$ b 49 c 13 d $\sqrt{12} - \sqrt{5}$

2) Si un corps tombe d'hauteur de 19,6 de la surface d'une terre laxiste. Il pénétre 14 cm dans la terre avant de s'arrêter trouve l'accélération du mouvement dans le sable en m/s².

a -1372 b -9.8 c 19.6 d 1732

3) Si on jette un dé régulier deux fois de suite et on note le nombre apparu sur la face supérieur. Alors la probabilité de l'événement « la différence absolue est égale à 4 » est

a $\frac{5}{18}$ b $\frac{1}{6}$ c $\frac{1}{9}$ d $\frac{5}{36}$

4) une pyramide régulière dont la base est un quadrilatère de côté 10 cm. Si sa hauteur latérale est 13 cm, alors son volume est égale à ………………….. en cm³

a $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 13$ b $\frac{1}{3} \times (10)^2 \times 12$ c $\frac{1}{3} \times (12)^2 \times 13$ d $\frac{1}{3}(13)^2 \times 10$

Deuxième question:

1) Une barre homogène repose par ses extrémités à deux plans inclinés sur l'horizontal des angles de mesures 60° et 30°. Trouver la mesure de l'angle d'inclinaison du plan à l'horizontal dans le cas d'équilibre. Si le poids de la barre est 24 Newton, déterminez les réactions des plans.

2) Cinq forces coplanaires concourantes d'intensités 12; 9; $5\sqrt{2}$; $7\sqrt{2}$ 7 kgp agissent dans les directions Est ; Nord ; Nord-Ouest ; Sud-Ouest ; Sud respectivement. Démontrez que le système est en équilibre

Troisième question

1) Un bateau se dirige vers un port suivant un trajet rectiligne. Quand il est encore à 100 km du port, un avion le survole à 250 km/h en sens contraire. L'avion a vu le bateau se déplacer à 275 km/h. Combien de temps faudra-t-il pour que le bateau atteigne le port ?

2) Une particule est lancée, opposé du vent à une vitesse de 40 cm/s il se déplace d'un mouvement retardé rectiligne d'une décélération uniforme de 8 cm/s². Trouvez la vitesse de la particule quand il est de distance :

a 84 cm du point de départ.

b 96 cm de l'autre part du point de départ (expliquez la signification des réponses obtenues)

Quatrième question

1. Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. Si $A \subset B$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{5}{8}$ calculer les probabilités suivantes :
   - **a** La nom réalisation de B.
   - **b** La réalisation de A
   - **c** La réalisation de B seulement
   - **d** La réalisation de l'un de deux événement seulement

2. Une pyramide régulière à base carrée de côté $8\sqrt{2}$ cm et la longueur de son arête latérale est $4\sqrt{6}$ cm Trouvez :
   - **a** l'aire latérale de la pyramide
   - **b** le volume de la pyramide.

Epreuve (10) Applications Mathématiques

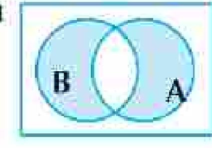
Répondez aux questions suivantes

Première question: Choisissez la bonne réponse parmi les réponses proposées:

1. Les valeurs maximale et minimale respectivement de la résultante de deux forces 8 et 13 Newton est :
   - **a** 13 ; 8
   - **b** 13 ; 5
   - **c** 21 ; 8
   - **d** 21 ; 5

2. Si un corps commence son mouvement à une vitesse de 30 cm/s et une accélération uniforme 5 cm/s² de même sens que la vitesse initiale, alors la distance parcourue après 10 secondes de début de mouvement .... cm
   - **a** 550
   - **b** 300
   - **c** 750
   - **d** 1500

3. L'événement qui représente la partie hachurée dans la figure ci – contre est



   - **a** $U - (A \cap B)$
   - **b** $U - (A \cup B)$
   - **c** $(A \cup B) - (A \cap B)$
   - **d** $U - (A \cup B)'$

4. La longueur du diamètre du cercle : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$ est égale à :
   - **a** 3
   - **b** 4
   - **c** 5
   - **d** 6

Deuxième question

1. Déterminez l'équation générale du cercle du centre (-2 ; 5) et passant par le point (3 ; 2)

2. Si A et B sont deux événements de l'univers des éventualités d'une expérience aléatoire. $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}25$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$ Calculez les probabilités suivantes :
   - **a** La réalisation de A
   - **b** La réalisation de A ou B
   - **c** La a n'est pas réalisé ou B n'est pas rélisé

Troisième question

1. Une boule homogène repose sur deux barres parallèles situées dans un même plan horizontal. La distance entre les deux barres est égale à la longueur du rayon de la boule. Trouvez la pression de la boule sur chaque barre sachant que son poids est 10 Newton.

2. Deux forces appliquent en un point matériel, si la valeur maximale de leur résultante est 32 kgp et la valeur minimale est 12 kgp. Trouvez les intensités de chacune de forces, puis trouvez leur résultante si la mesure de l'angle des les deux forces est 60°.

Quatrième question

1. Si la force d'attraction entre le soleil et la Terre est 35.67×10^{21} Newton, la masse de la Terre est 5.97×10^{24} kg et la masse du soleil est 19×10^{29} kg. Trouvez la distance entre la Terre et le soleil sachant que la constante de gravitation universelle est égale à 6.67×10^{-11} Newton m^2/kg^2

2. Une balle est tirée horizontalement sur une masse de bois avec une vitesse de 100 m/s. Elle pénètre dans le bois sur une distance de 50 cm. Trouvez l'accélération du mouvement de la balle dans le bois en supposant qu'elle est constante. Si la balle est tirée sur une autre masse semblable de la première d'épaisseur 18 cm. Quelle est la vitesse de la balle quand elle sort du bois ?

Unité 1 Statique

Réponses de quelques exercices de la leçon 1

(3) 10 Newton (4) 4 Newton (5) $\sqrt{19}$ Newton
(6) c (7) d (8) c
(9) d (10) b (11) $5\sqrt{3}$, 90°
(12) $R = 3\sqrt{5}$ N; $m(\angle\theta) = 26°\ 33'\ 54''$
(13) 120° (14) F = 4 N (15) $4\sqrt{2}$ N
(17) 90° (18) 15 N ; et perpendiculaire à la 1ère force
(19) $1 + 2\sqrt{3}$ (20) $6\sqrt{3}$ kg.p
(21) 5 et 3 N (22) 15 N
(23) $3\sqrt{5}$ kg.p (24) $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$

Réponses de quelques exercices de la leçon 2

(1) Zéro (2) 4
(3) 8,78 N ; 6,21 N (4) $18\sqrt{2}$; 18
(5) 6 kgp (6) $6\sqrt{6}$; $6\sqrt{2}$
(7) 439,231 gp ; 310, 583 gp
(8) $60\sqrt{2}$, $60\sqrt{2}$
(9) $80\sqrt{3}$; 80 (10) 9 ; $9\sqrt{3}$
(11) 21 N (12) 360 gp
(13) 2588 N ; 3660 N

Réponses de quelques exercices de la leçon 3

(1) 5 ; tan $\frac{4}{3}$ (2) 3 ; $\frac{10}{3}$ (3) -1, 1
(4) figure 1 $tg^{-1}\frac{3}{4}$ figure 2 tan^{-1} 5
figure 3 R = 1 dans le sens de $\overrightarrow{ox}$
figure 4 R $2\sqrt{3}$ perpendiculaire à $\overleftrightarrow{BC}$
figure 5 $tg^{-1}\frac{3}{7}$
figure 6 R = 20 , $tg^{-1}\sqrt{3}$
(5) 3 ; la résultante agisse dans le sens de la deuxième force
(6) 210°
(7) $\theta = 120°$ (8) $5\sqrt{3}$ N ; 60°
(9) $\sqrt{2}$ N ; 45° (11) a = -1 ; b = 1
(12) K = 3 kgp ; F = 45°
(13) F= 3 N ; K = 14 N
(14) F= 3 N ; K = 14 N

Réponses de quelques exercices de la leçon 4

(1) Polygone fermé (2) x = 0 et y = 0
(3) 3, 5
(6) **Figure 1:** $20\sqrt{3}$; $40\sqrt{3}$
Figure 2: $6\sqrt{3}$; 6
Figure 3: $50\sqrt{5}$; 50
Figure 4: 18 N; 24 N
Figure 5: $20\sqrt{2}$ gp
Figure 6: $\theta = 60°$, P = 16 unité de force
(7) 9; 15 kg.P
(8) $10\sqrt{2}$; $10\sqrt{2}$ Newton
(9) R_1 , $R_2 = 20\sqrt{3}$ N
(10) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ P ; $\frac{\sqrt{7}}{2}$ P
(11) $F = 30\sqrt{3}$ g.p ; x = 30 g.p
(12) $T_1 = 200 \times \frac{4}{5} = 160$ g.p
$T_2 = 200 \times \frac{3}{5} = 120$ g.p
(13) $\theta = 60°$
(14) F = 600 g.p et R = 1000 g.p
(15) $R = 36\sqrt{3}$ N, P = 72 N
(16) $R_1 = 3\sqrt{3}$ N et $R_2 = 6$ N
(17) $T_1 = 12$ N , $T_2 = 16$ N
(18) F = 9 kgp ; K = 5 kgp
(19) F = 9 kgp ; K = 6 kgp
(20) $F = 2\sqrt{3}$ kg.p , 30°

Réponses de quelques exercices généraux de l'unité

(1) F = 4 dyne (2) 13 , 3 N
(3) p sinθ (4) 10 kgp
(5) a = -6 , b = 2
(6) figure 1 : F = 3, $k = 3\sqrt{3}$
figure 2 : F = k = 4

Réponses de quelques exercices de L'épreuve cumulative

(1) a son intensité seulement
b l'intensité et le sens

6) $R = 8$ N , $\theta = 30°$

7) $e = 120°$

Unité 2: Dynamique

Réponses de quelques exercices de la leçon 1

1) 72 km/h
2) 25 m/s
3) 18km
7) c
8) c
9) c
10) c
11) $v = 90.24 \times 10^7$ m/s
12) Le temps d'attendre = 7 minutes
13) d = 225 m
15) $V_m = 100$ m/min
16) d pour la premier = 66 km
20) d = 25 m

Activité 2 :

22) $\overrightarrow{d_4} = 28\ \overrightarrow{e}$

Réponses de quelques exercices de la leçon 2

1) a 24 b 10 e 3 m/s²
2) 72m
3) 363m
4) 6,25
6) 27 m
7) 81, 1080
8) 42m
11) 3s
13) 8 s

Réponses de quelques exercices de la leçon 3

1) 8,4 m/s
2) 58,8 m/s
3) a 10 s b 49 m/s
4) 14 m/s, 7 m/s
6) 14,7m/s, 2s
8) 10s
9) a 19,6 m/s² b 19,6m c 24,5 m
10) a 3,6 m b 2 s d 5 s
11) a 35 m/s b 62,5 m c 10 s
12) 3s, 44,1m, 15,9 m

Réponses de quelques exercices de la leçon 4

6) $8,112 \times 10^{12}$
7) $6,4898 \times 10^{12}$
8) $2,50125 \times 10^{-9}$
9) $1,7543 \times 10^{10}$
10) 6×10^{24}
11) $1,6008 \times 10^{22}$
12) 1724 km
13) 9,99m/s²
14) $\frac{1}{3}$
15) $2,668 \times 10^{33}$

Réponses de quelques exercices généraux

4) 2m/s , 10m
5) 10s
7) d = 49m/s , v = 122,5 m
9) $v_0 = 21$ m/s , $t = \frac{20}{7}$ s
11) $V_m = 6$ m/s
12) $d_1 = 30$ km
15) 114m
17) t = 20 s

Réponses de quelques exercices de L'épreuve cumulative

1) b
2) a R maximum = 24 N
   b R minimum = 8 N
   c $8\sqrt{3}$ N et fait un angle de 30° avec la force 16 N
3) $5\sqrt{2}$ N et fait un angle de 315° avec la 1ère force

Unité 3 : La géométrie et la mesure

Réponses de quelques exercices de la leçon 1

6) a infinités b infinités c infinités d un seul plan e quatre plans
7) a $\subset$ b $\in$ c $\notin$ d $\not\subset$
10) a ✓ b ✓ c ✓ d ✗

Réponses de quelques exercices de la leçon 2

1) a 5 b 6 c 5 d 10
2) la hauteur de la pyramide ; la hauteur latérale; la longueur de l' arrête
3) 120 cm ; 109 cm
4) la longueur de la génératrice du cône de la tente.
5) la hauteur de la grande pyramide est égale à peut près 145 mètres

Réponses de quelques exercices de la leçon 3

1) a $\overleftrightarrow{AC}$ b $\overleftrightarrow{BC}$ c $\overleftrightarrow{CD}$ d $\overleftrightarrow{AB}$ e $\subset , \subset$ f $\{C\}$
4) l'aire latérale = $576\sqrt{3}$ cm²
5) le côte du papier = 510 Livres

(7) la longueur du rayon du cercle du cône = 7 cm

Réponses de quelques exercices de la leçon 4

(1) $4800 cm^3$ (2) $9175.8\ cm^3$ (3) 10cm
(4) $3500 cm^3$ (6) $1582.8\ cm^3$ (7) $342.3\ cm^3$
(9) 987.5 g (10) 8 cm (11) $140.9 m^2$

Réponses de quelques exercices de la leçon 5

(1) a (2) c (3) b (4) b
(5) d (6) d
(7) a $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$
b $x^2 + y^2 = 16$ c $(x-3)^2 + y^2 = 36$
(8) a $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$
b $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 9$
c $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$
(9) a $(x-7)^2 + (y+5)^2 = 65$
b $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 18$
(12) a m (-1 ; 0) , r = 3

Réponses de quelques exercices généraux

(2) deux points (2) un seul plan
(3) Trois points au moins (4) confondus
(5) de même longueur (8) $\sqrt{18}$
(11) $60\pi\ cm^2$ (12) $384\ cm^2$ (13) $384\ cm^3$
(14) $4 : \pi$ (15) 9cm (16) $260\ cm^2$
(21) $x^2 + y^2 - 10x + 24y = 0$

Réponses de quelques exercices de L'épreuve cumulative

(1) d (2) d (3) d (5) b
(6) a Une seul droite b n'existe pas
c Une seul droite d 6 droites
(7) a une infinité b une infinité
c Un seul plan
(9) $x^2 + y^2 - 4x + 14y - 48 = 0$
(11) $1761.8\ cm^3$

Unité 4 : probabilité

Réponses de quelques exercices de la leçon 1

(5) A = {12; 14 ; 16; 18; 20} ,
B = {1; 2; 3; 4; 6; 12} , C ={3; 9; 15},
D = {10; 20} , F = {1; 2; 3; 4}
(9) c (10) d (11) b (12) d (13) d
(15) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{18}$
(18) a 0.2 b 0.45 c 0.55
(22) $\frac{1}{6}$; $\frac{5}{36}$, $\frac{5}{18}$ (23) $\frac{13}{15}$; $\frac{4}{15}$; 0.4 ; 0.6

Réponses de quelques exercices généraux

(1) c (2) d (3) c (4) a (5) a
(6) d (7) c (11) P(B') = 0.3
(14) $P(A) = \frac{3}{8}$ $P(C) = \frac{1}{2}$ $P(A) = \frac{1}{4}$
(17) a 0.235 b 0.1 c 0.53 d 0.825

Réponses de quelques exercices de L'épreuve cumulative

(1) s = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
(4) { (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4,1)}
(5) { 3, 6, 9, 12, 15, 18}
(8) a 0.15 b 0.2 c 0.3
(9) a 0.3 b 0.45 c 0.7
(10) a 0.25 b 0.35 c 91

Epreuve (1) : premier question

(1) a (2) c (3) d (4) c

Deuxième question

(1) a = 10, b = 1
(2) $F = 100\sqrt{3}$ gp , $R = 100\sqrt{3}$ gp

Quatrième question :

(1) a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{11}{12}$
(2) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

Epreuve (2) : premier question

(1) c (2) d (3) b (4) b

Deuxième question :

(1) $\simeq 23cm$ (2) (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$

Troisième question :

(1) 120 g.p. : 90 g.p.

(2) $\sqrt{651}$ N , $m(\theta) = 40° \ 9' \ 30''$

Epreuve (3) : premier question

(1) (c) (2) (a) (3) (b) (4) (c)

Troisième question :

(1) 1) 12,5 g.p ; 7,5 g.p (2) 1 : 96

Epreuve (4) : premier question

(1) (a) (2) (d) (3) (a) (4) (c)

Deuxième question :

(1) (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{15}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

(2) 14cm

Troisième question :

(1) (1) 60 kgp ; 92° 23' 11''

(2) $T_1 = T_2 = 93,75$ kgp

Epreuve (5) : premier question

(1) (b) (2) (c) (3) (c) (4) (a)

Deuxième question :

(1) (a) 30 km/h (b) 150 km/h

(2) 82,6 km/h $\overrightarrow{e}$

Troisième question :

(1) $9\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$ N (2) 8 , 16 gp.

Epreuve (6) : premier question

(1) (a) (2) (c) (3) (b) (4) (d)

Deuxième question :

(1) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

(2) (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$

Troisième question :

(1) 9,844 m/s^2 (2) 30 unité de distance

Epreuve (7) : premier question

(1) (c) (2) (a) (3) (b) (4) (d)

Troisième question :

(1) $\frac{95}{4}$ cm (2) 22,5m

Quatrième question :

(1) (a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{7}{8}$

(2) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

Epreuve (8) : premier question

(1) (c) (2) (d) (4) (a)

Deuxième question :

(1) $\overrightarrow{D} = (t^2 + 3t)\ \overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{D} = 18\ \overrightarrow{e}$

$\overrightarrow{V} = 6m/s\ \overrightarrow{e}$

(2) (a) 8 s (b) 58,8 m/s

Quatrième question :

(1) 15cm , 540cm^2

(2) (1) 0,2 (2) 0,9 (3) 0,4

Epreuve (9) : premier question

(1) (c) (2) (a) (3) (c) (4) (b)

Deuxième question :

(1) 12, $12\sqrt{3}$ N

Troisième question :

(1) 2 h (2) (a) 16 cm/s (b) 56 cm /s

Epreuve (10) : premier question

(1) (d) (2) (a) (3) (c) (4) (d)

Quatrième question :

(1) $14,6 \times 10^{10}$ (2) 100 m^2/s^2 , 80 m/s

http://elearing.moe.gov.eg

جميع حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم داخل جمهورية مصر العربية

المواصفات الفنية:

مقاس الكتاب	$\frac{1}{8}$ (٥٧ × ٨٢) سم
طبع المتن	٤ لون
طبع الغلاف	٤ لون
ورق المتن	٨٠ جم أبيض
ورق الغلاف	٢٠٠ جم كوشيه
عدد الصفحات بالغلاف	١٨٠ صفحة
رقم الكتاب	١٥٨٨/١٠/١٥/٢٢/٢/٣٧

